


Г.К. КАЗАКБАЕВА¹✉, К.Ж. НАЗАРОВА² ¹Ж. Ташенов атындағы №23 IT мектеп-лицейі математика пәні мұғалімі
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: jazi_0466@mail.ru²физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz

СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТТЕРІН ҚОЛДАНУДЫҢ ТИІМДІЛІГІ

Аңдатпа. Бұл мақалада күрделі функцияның қасиеттері, туындының физикалық және геометриялық мағынасын есептер шығаруда қолдану әдістері, қолданбалы, оның ішінде әлеуметтік-экономикалық есептерді шешуде туындыны пайдаланып, тиімді шешімін табу жолдары қарастырылған.

Зерттеу барысында оқушылардың есептерді шешуін талдау педагогикалық эксперимент негізінде жүзеге асырылды, әңгімелесу әдісі арқылы есептерді шешу кезінде таңдалған математикалық әдістерді сипаттау үшін құжаттарды талдау, шешуде қолданылған алгоритмдері талқыланды.

Зерттеу нәтижесінде мектеп математика курсына математикалық анализ элементтерін зерделеу бойынша әдістемелік ұсыныстарға ерекше көңіл бөлінген, сонымен қатар 9–11-сыныпта математикадан емтиханда, олимпиадаларда кездесетін типтік математикалық есептерді шешу әдістері берілген. Әртүрлі күрделілік деңгейдегі стандартты емес және олимпиадалық есептерге оқушылармен бірге талдау жасау, шешу жолдарын көрсету бойынша ғылыми зерттеу нәтижелері берілді. Зерттеулер нәтижесінде математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес есептерді шешудің тиімді әдісі ретінде бірнеше амал ұсынылды.

Ғылыми зерттеудің нәтижесін математиканы тереңдетіп оқытатын мектепте, лицейде немесе гимназияда стандартты емес есептерді шешу кезінде қосымша материал ретінде пайдалануға болады.

Кілт сөздер: математикалық анализ элементтері, алгебра және анализ бастамалары, туынды, туындының физикалық мағынасы, туындының геометриялық мағынасы, функцияны зерттеуде туындының қолданылуы.

***Бізге дұрыс сілтеме жасаңыз:**

Казакбаева Г.К., Назарова К.Ж. Стандартты емес есептерді шешуде математикалық анализ элементтерін қолданудың тиімділігі // *Ясауи университетінің хабаршысы.* – 2023. – №3 (129). – Б. 268–281. <https://doi.org/10.47526/2023-3/2664-0686.20>

***Cite us correctly:**

Kazakbaeva G.K., Nazarova K.J. Standartty emes esepтерdi sheshude matematikalıyq analiz elementterin qoldanudyn tiimdiligi [Effectiveness of Using Elements of Mathematical Analysis in Solving Non-Standard Problems] // *Iasauı universitetinin habarshysy.* – 2023. – №3(129). – B. 268–281. <https://doi.org/10.47526/2023-3/2664-0686.20>

G.K. Kazakbayeva¹, K.Zh. Nazarova²¹*Mathematics Teacher of the IT School-Lyceum No.23 named after Zh. Tashenova
(Kazakhstan, Turkistan), e-mail: jazi_0466@mail.ru*²*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz***Effectiveness of Using Elements of Mathematical Analysis in Solving Non-Standard Problems**

Abstract. This article discusses the properties of complex functions, methods This article discusses the properties of complex functions, ways to use the physical and geometric meaning of the derivative when solving problems, ways to find an effective solution using the derivative when solving applied, including socio-economic problems.

The study included an analysis of how students solve problems based on a pedagogical experiment, an analysis of documents to describe the mathematical methods chosen when solving problems using the interview method, as well as algorithms used in solving them.

As a result of the study, special attention was paid to methodological recommendations for studying the elements of mathematical analysis in a school mathematics course, as well as methods for solving typical mathematical problems encountered in state exams and olympiads in mathematics in grades 9–11. The results of scientific research on analyzing and demonstrating solutions to non-standard and Olympic problems of various levels of complexity together with the student are presented. As a result of the study, several methods were proposed as an effective way to solve non-standard problems associated with elements of mathematical analysis.

The result of scientific research can be used as auxiliary material when solving non-standard problems at school, lyceum or gymnasium, where mathematics is taught in depth.

Keywords: elements of mathematical analysis, beginnings of algebra and analysis, derivative, physical meaning of the derivative, geometric meaning of the derivative, use of the derivative in the study of functions.

Г.К. Казакбаева¹, К.Ж. Назарова²¹*учитель математики IT школы-лицея №23 имени Ж. Ташенова
(Казахстан, г. Туркестан), e-mail: jazi_0466@mail.ru*²*кандидат физика-математических наук, доцент
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави
(Казахстан, г. Туркестан), e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz***Эффективность использования элементов математического анализа
при решении нестандартных задач**

Аннотация. В данной статье рассматриваются свойства сложных функций, способы использования физического и геометрического смысла производной при решении задач, способы поиска эффективного решения с использованием производной при решении прикладных, в том числе социально-экономических задач.

В ходе исследования проведен анализ решения учащимися задач на основе педагогического эксперимента, анализ документов для описания математических методов, выбранных при решении задач методом интервью, а также алгоритмы, используемые при решении.

В результате исследования особое внимание уделено методическим рекомендациям по изучению элементов математического анализа в школьном курсе математики, а также методам решения типовых математических задач, встречающихся на государственных

экзаменах и олимпиадах по математике в 9–11-классах. Приведены результаты научных исследований по анализируванию и показу решений нестандартных и олимпийских задач разного уровня сложности совместно с учащимися. В результате исследования было предложено несколько методов как эффективный способ решения нестандартных задач, связанных с элементами математического анализа.

Результат научных исследований может быть использован как вспомогательный материал при решении нестандартных задач в школе, лицее или гимназии, где углубленно преподается математика.

Ключевые слова: элементы математического анализа, начала алгебры и анализа, производная, физический смысл производной, геометрический смысл производной, использование производной при изучении функций.

Кіріспе

Мектептегі математикалық білім беру мазмұнын жаңарту мәселелерімен айналысатын мамандардың назарын белгілі бір сюжеттік тапсырмалар, арнайы әдебиеттерде әртүрлі синонимдік терминдермен белгіленеді: проблемалық, шығармашылық, ізденіс, эвристикалық, яғни тапсырмалар, шешу әдісі, субъектінің қарамағында болмайтын – объективті немесе субъективті стандартты емес тапсырмалар.

Жалпы білім беретін мектепте математикалық анализ элементтерін оқытудағы қиындықтар, ең алдымен, математиканың осы саласының күрделі концептуалды аппаратымен, сонымен қатар кейбір зерттелетін анықтамалар мен теоремалардың қатаң тұжырымдары мен дәлелдемелерімен байланысты.

Дегенмен, бұл мәселені ешбір жағдайда зерттелмеген деп санауға болмайды. Керісінше, тақырып бойынша жалпылау жұмыстарының жоқтығына қарамастан, ол математиктер мен мұғалімдердің назарын барынша аударады. Бұл мәселені белгілі математиктер М. Ньютоннан бастап, П.Л. Чебышев (XIX ғ.), А.Н. Колмогоров (XX ғ.), В.А. Гусев және басқа да ғалымдар зерттеген [1.] Отандық педагог математиктер Б. Баймұханов [2], Е.У. Медеуов [3], және басқалардың зерттеу жұмыстарының нәтижесі елеулі үлес болып саналады. Қазақ ғалымдарының ішінен О.А. Жәутіковтің математикалық анализ саласы бойынша қазақ тіліндегі іргелі зерттеу нәтижелері және оқу құралдары бар [4].

Бұл тақырып аясында зерттеу жүргізіп жүрген Ж.А. Нурмағанбетованың мақаласында былай делінген: «Оқушылардың мектеп математика курсына осылай жүйелі түрде ұйымдастырылған әртүрлі функциялар кластарын зерттеудегі белсенділігі функционалды-графикалық ойлауды дамытуға ықпал етеді және функциялар кластарын оқып үйренуде мүмкіндік жайлы жағдай туғызады» [5].

Математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептер дәстүрлі түрде мектептен тыс жұмыстардың әртүрлі нысандарында, бітірушілер үшін аттестаттау сынақтарын өткізу кезінде және мектептегі математикалық олимпиадаларда қолданылады. Сонымен қатар, кейде оқушылар ғана емес, мұғалімдер де үлгілік есептерден ерекшеленетін есептерді шешуде қиындықтарға тап болады. Бұл бір жағынан оқу орындарында математикалық пәндерді оқу процесінде және мұғалімдердің педагогикалық іс-әрекетінде осы санаттағы мәселелерді шешу тәжірибесінің жеткіліксіздігімен, сондай-ақ оларды пайдаланумен бірге жүретін объективті қиындықтардың болуы, шешуге арналған ұсыныстардың тым қысқалығы, оқу уақытының аздығы үлкен мәселеге айналып отыр.

Стандартты емес есептер математикалық білім берудің негізгі құрамдас бөліктерінің бірі болып табылады. Көптеген сарапшылар болашақ әлемде өмір сүру және жұмыс істеу үшін негізгі құзыреттердің өзегі стандартты емес есептер мен мәселелерді шешу қабілетімен

келіседі. Бұл тапсырмаларда оқушылар математикалық есепті шығарып, шешудің жолын, әдісін ашуы керек, өйткені олардың бұрынғы тәжірибесі есепті шығаруға мүмкіндік бермейді. Тапсырманы шешу тәртібі әдетте белгісіз және шешуші нәтижеге жету жолын көбінесе әдеттегі жолмен іздейді. Сондықтан стандартты емес тапсырмаларды шешу терең шоғырлануды, өнертабысты және уақытты қажет етеді. Әдетте дарынды оқушылармен жұмыс істеу үшін стандартты емес тапсырмаларды шешу және құру қолайлы болып саналады, өйткені тапсырмалар білімді, метатанымды және мотивацияны дамытады[6]. Дегенмен осы саладағы теориялық тұрғыда дәлелденген әдіс-тәсілдердің аздығы тақырыптың өзекті екенін айқындап отыр. Сол себепті осы тақырып бойынша зерттеу жүргізіп көру туралы шешім қабылданды.

Жұмыстың мақсаты – жоғары сыныптарда математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес функционалдық теңдеулерді шешу жолдарын классификациялау, мектеп оқушылары мен педагогтеріне тиімді әдістерді сипаттау.

Осы мақсатқа жетуде күрделілігі әртүрлі деңгейдегі олимпиадалық және стандартты емес есептерді іріктеп алып, шешу жолдарын көрсету зерттеудің басты міндеті.

Зерттеу әдістері

Зерттеудің нысаны математикалық анализ элементтеріне берілген стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу жолдары. Зерттеу Түркістан қаласындағы Ж.Ташенов атындағы №23 ІТ мектеп-лицейі базасында 10–11-сынып оқушылары арасында жүргізілді.

Ғылыми зерттеу жұмысын жүргізу кезінде, тақырып пен тапсырмалардың күрделілігі бойынша педагогикалық талдау, берілген материалды оқушының меңгеру деңгейін *бақылау*, математикалық анализ элементтеріне қатысты тарауларды оқытуда оқушылардың қызығушылығын арттыру мақсатында педагогикалық эксперимент әдістері қолданылды.

Мектеп курсындағы математикалық анализ элементтеріне, оның ішінде «Туынды», «Туындының қолданылуы» тарауы бойынша стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешудің тиімді әдістеріне дарынды оқушымен бірге талдау жүргізілді. Көрсетілген әдістерді оқушының меңгеру деңгейі бақыланды.

Талдау мен нәтижелер

XIX ғасырдағы орыс математигі Панфутий Львович Чебышев: «Адамның барлық практикалық іс-әрекетіне ортақ мәселені шешуге мүмкіндік беретін ғылым әдістерінің, мысалы, ең үлкен пайдаға жету үшін өз қаражатын қалай басқаруға болатындығы ерекше маңызды» деген [7, 98-б.].

Бұл математикалық анализдің мәселелері. Математикалық талдаудың маңызды ұғымдарының бірі – функцияның туындысы.

Дәл дифференциалды есептеудің көмегімен көптеген практикалық есептер тиімді шешіледі.

Туынды тәуелсіз айнымалының өзгеруіне қатысты функцияның өзгеру жылдамдығын сипаттайды.

Математикалық анализдің негізгі заңдарын ашу құрметі ағылшын физигі және математигі Исаак Ньютонға және неміс математигі, физигі, философы Лейбницке тиесілі. Туынды және қазіргі заманғы y' , f' белгілерін 1797 жылы Дж. Лагранж енгізген [8, 112-б.].

Дифференциалдық есептеу дегеніміз – бізді қоршаған дүниенің математикалық тілде жасалған сипаттамасы. Туынды математикалық есептерді ғана емес, ғылым мен техниканың әртүрлі салаларындағы практикалық есептерді де сәтті шешуге көмектеседі.

Функцияның туындысы процестің біркелкі емес ағыны болатын барлық жерде қолданылады: бұл біркелкі емес механикалық қозғалыс, айнымалы ток, химиялық реакциялар және заттардың радиоактивті ыдырауы және т.б.

Туындыны қолданып шешілетін көптеген есептердің ішінде ең маңыздысы функцияның экстремумын табу мәселесі және оған сәйкес функциялардың ең үлкен (ең кіші) мәнін табуға байланысты есеп болып табылады.

Жалпы білім беретін мектеп оқушыларына енгізілетін математикалық талдаудың негізгі элементі «туынды» ұғымы болып табылады. Бұл ұғымды әзірлеуде шектік, антиуынды, интегралдық және дифференциал ұғымдары берілген. Бұл бөлімде біз бұл тақырыпты оқулықтарда көрсетудің әртүрлі жолдарын қарастырамыз.

Базалық деңгей күрделі деңгейден формулалардың дәлелдемелері мен туындыларының жоқтығымен ерекшеленеді, негізінде барлық формулалар дайын түрде беріледі.

«Туындыны тауып есептеудің негізгі идеясы – нүктенің жеткілікті шегі төңірегінде функцияны сызықтық түрде көрсету» [9, 76-б.]. Осы идеяға сүйене отырып, біз «Функцияның туындысы» тақырыбын зерттеу үшін пропедевтиканың бірқатар бағыттарын бөліп аламыз:

1) «сызықтық функцияны терең зерттеу», түзу сызық пен Ox осінің оң бағыты арасындағы бұрыш қалай табылатынын қайталау керек;

2) аргумент өсімі және функция өсімі ұғымы бойынша жұмыс, осы ұғымдардың геометриялық және механикалық түсіндірілуін және олардың өзара байланысын зерттеу; функцияның өсімшелерінің аргумент өсіміне қатынасы соңғысының функциясы екендігі туралы түсінік беру керек;

3) қисыққа жүргізілген жанама, шеңберге жүргізілген жанаманың не екенін есте сақтау керек, дөңес функциялар мен оларға жүргізілген жанамаларға мысалдар келтіру керек. Мысалы, квадраттық функция $y = x^2$, оған жанама ордината емес, абсцисса осі, дегенмен екеуінің де параболамен бір ғана қиылысу нүктесі бар [9].

Туынды ұғымының мағынасын түсіну, оның негізгі және тереңдетілген деңгейде математиканы меңгерудегі барлық оқушыларға қажеттілігін түсіндіру үшін білім алушыларға «Туындының қолданылуы» тарауы бойынша ғылыми-ақпараттық мәлімет беру ұсынылады.

Алгебра және математикалық анализдің принциптері бойынша мектеп оқулықтарындағы «Туындының қолданылуы» тақырыбы бойынша материалдың берілуіне сипаттама берейік.

1. Орташа мән теоремалары (Ролле және Лагранж) қарастырылады (математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарда).

2. Функцияларды монотондылыққа зерттеу (функцияның монотондылығының табиғаты мен оның туындысының таңбасы арасындағы байланыс). Функцияның максимум (минимум) нүктесінің анықтамасы берілген. Функцияны монотондылыққа зерттеу, экстремумдарын табу алгоритмдері берілген [10].

3. Көлденең, қиғаш және тік асимптоталар ұғымдары және оларды табу әдістері енгізіледі.

4. Ойыс (дөңес) функция мен иілу нүктесінің анықтамасы берілген (функцияның дөңестігі мен оның екінші туындысының таңбасының арасындағы байланыс). Біз дөңес (ойыс) функциясын, иілу нүктесін табу алгоритмін (математиканы тереңдетіп оқытатын сыныптарда) зерттейміз.

5. Функцияны толық зерттеу және оның графигін тұрғызу алгоритмі енгізілген.

6. Үздіксіз функцияның интервалдағы ең кіші және ең үлкен мәндерін табу мәселесі және оларды табу алгоритмі қарастырылады [11]. Шамалардың ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға есептер шығарылады.

Оқулықтағы туынды ұғымы бірте-бірте зерттеледі: алдымен көрнекі-интуитивтік деңгейде, одан кейін жұмыстық (сипаттау) деңгейде, содан кейін ғана формалды деңгейге өтеді. Туындының анықтамасының негізінде жатқан шек ұғымы оқулықта формальды

деңгейде берілмейді. Сандық реттілік шегінің анықтамасы алдымен көрнекі-интуитивтік деңгейде, содан кейін жұмыс деңгейінде енгізіледі. Функция шегінің шексіздіктегі де, нүктедегі де анықтамалары көрнекі-интуитивтік деңгейде қалады.

Оқулықтағы аргументтердің көпшілігі формальды қатаңдықты көрсетпейді, олар тек ақылға қонымды дәлелдер болып табылады, мысалы, функцияның үздіксіздік және дифференциалдығы сияқты қасиеттерінің қандай байланысы бар деген сұрақты талқылау.

Математика бойынша орта (толық) жалпы білім берудің білім беру стандарты (базалық деңгей) орта мектепте математиканы оқыту басқалармен қатар «жалпыға бірдей математиканың идеялары мен әдістері туралы түсініктерді қалыптастыру» сияқты мақсаттарға жетуге бағытталғанын қарастырады. Ғылым мен техника тілі, процестер мен құбылыстарды модельдеу құралы, математика арқылы жеке тұлғаның мәдениетін тәрбиелеу, көрнекті отандық және шетелдік математиктердің өмірі мен шығармашылығымен таныстыру, математиканың қоғамдық прогресс үшін маңызын түсіну, әрине, оқушыларды математикалық анализ элементтермен таныстырмай жүзеге асыру мүмкін емес.

Сондықтан сол Білім беру стандартында көзделген негізгі білім беру бағдарламалары мазмұнының міндетті минимумы математикалық анализдің бастауларына тікелей қатысты бірқатар тақырыптарды ұсынады, соның ішінде: функцияның шегі мен үздіксіздігі туралы түсінік, функцияның туындысы туралы түсінік, функцияның туындысының физикалық мағынасы осы функцияның өзгеру жылдамдығы, туындының тангенс бұрыштық коэффициенті ретіндегі геометриялық мағынасы туралы, туындылар кестесімен және ережелерімен танысу туындыларды табу, туындыны пайдаланып функцияны зерттеу және графиктерін салу, қисық сызықты трапецияның ауданы ретінде анықталған интеграл туралы түсінік.

Орта мектепте математиканы базалық деңгейде оқу нәтижесінде бітіруші басқа нәрселермен қатар: туындылар кестесін (көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық, дәрежелік функциялар) пайдалана отырып, элементар функциялардың туындыларын есептей алады деп болжанады: Туындыларды табу ережелері (көбейтіндінің туындысы, бөлшектердің туындысы); функцияларды монотондылық пен экстремалдылыққа тексеру, функциялардың ең үлкен және ең кіші мәндерін табады. Осы алған білімдерін ең үлкен және ең кіші мәндерге геометриялық, физикалық және басқа қолданбалы есептерді шығаруда, функция графиктерін салу кезінде қолданады.

Мектепте математикалық анализ элементтерін оқыту тұрғысынан – математика пәнін таңдамайтын оқушыларға математикалық анализ элементтерін оқыту қажет пе және ол мектеп бағдарламасының элементі ретінде мүмкін бе деген мәселе оң шешімін тапты.

Жоғарыда айтылғандардан туындайтын негізгі мәселе – математика пәнін таңдамайтын оқушыларға қолжетімді болатын теориялық ақпарат пен практикалық тапсырмалардың деңгейін таңдау, математикалық анализ негіздерін оқыту әдістемесі.

Осылайша қойылған мәселеден екі негізгі міндет шығады: тыңдаушылардың таңдауына сәйкес практикалық тапсырмаларды таңдау және практикалық тапсырмалар деңгейіне сәйкес дайындық деңгейін таңдау.

Бұл жұмыста біз «Туынды, оның геометриялық және физикалық мағынасы» тақырыптарымен шектелуді жөн көрдік, өйткені олар математиканы тереңдетіп оқытпайтын сыныптардағы оқушыларға ең қолжетімді. Төтенше жеңілдетуге мүмкіндік бере отырып, олар өздерінің даму маңыздылығын сақтайды.

Математикалық материалды жалпылай алмау жалпылау қабілетінің жоқтығы емес, тек математикалық шамалар, қатынастар мен таңбалар саласында жалпылау қабілетінің жоқтығы екені анықталды. Мәселе жалпы алғанда абстрактілі ойлаудың әлсіздігінде емес, оның математикалық категориялар мен қатынастар саласындағы әлсіздігінде.

Математикалық материалды жалпылай алмау басқа мнемоникалық жазықтықта математикаға қабілеті аз оқушылардың психикалық әрекетін, математикалық жалпылауды есте сақтаудың әлсіздігін сипаттайтын тағы бір психологиялық ерекшелікпен тығыз байланысты. Бұл математикаға қабілетсіз оқушылардың есте сақтау қабілетінің нашарлығы туралы емес, оның жеткіліксіздігі математикалық материалмен амалдарды орындауда және математикалық қатынастар мен символдарда кездеседі.

Математикаға қабілетсіз оқушылардың ақыл-ой әрекетінің тағы бір ерекшелігі – бір ақыл-ой операциясынан екіншісіне ауысудың айқын қиындығы, олардың математикалық ойлауындағы өзіндік шектеу.

Басқаша айтқанда, математикаға қабілеті төмен оқушыларға тән, жаңа шешу жолдары немесе жаңа ойлау тәсілдері қалыптастырған математикалық жалпылаулар, белгілі бір ойлау тәсілі жалпылауды қалыптастыруға тежеуші әсер етеді.

Осылайша, психологиялық ерекшеліктерге сүйене отырып, математикамен айналысуға қабілетсіздікті жеңудің жолдарын табу мүмкін және қажет.

Математикалық талдау элементтерін оқытудың дәстүрлі әдісі жалпылама білімді меңгеру үшін сөз бен бейненің дұрыс әрекеттесуі қажет деп болжайды, бұл жеткілікті кең сипаттауды, яғни бұл көрнекі тіректің вариациясын талап етеді [10]. Басқаша айтқанда, математикадан қабілетсіз оқушылар үшін бейнелі және логикалық элементтерді біріктіретін біртұтас әдістеме қажет.

Сонымен, А.Г. Мордкович орта мектепте математикалық талдауды зерттеуге арналған әдістемелік нұсқаулығында бейнелі және логикалық элементтерді әр түрлі қатынаста кеңінен қолданады:

«Мысалы, туындыны пайдаланып функцияны зерттеуді қарастырайық. Бұл тақырып математика мұғалімі мен мектеп оқулықтарының авторларының әдістемелік мәдениетін сынай алады. Өйткені, біз мектеп математика курсына математикалық анализ элементтерін енгізуге не себеп болғанын білу қажеттігі, теоремалар туралы айтып отырмыз. Сонымен бірге бұл теоремалардың қатаң дәлелдемелерінде мектеп математика курсына қарастырылмаған математикалық анализдің көптеген фактілерін білу қажет. Мұғалім қандай жолды таңдауы керек: теоремаларды дәлелдеусіз және түсініктемесіз баяндау? Визуалды-интуитивтік бейнелеулермен және орынды пайымдаулармен шектелген бе? Әлі де қатаң дәлелдер беруге тырысасыз ба?» [9, 46-б.].

Жалпы білім беретін мектептерге арналған оқулықтар мен оқу-әдістемелік құралдарда әртүрлі нұсқалар бар. Мысалы: дәлелдеусіз, бірақ графикалық иллюстрацияларға сүйене отырып, Лагранж теоремасы тұжырымдалады, содан кейін оның көмегімен туынды таңбасының функцияның интервалдағы монотондылығының әсері туралы теорема қатаң түрде дәлелденеді. Бұл логикаға келмейтіндіктен ең жақсы нұсқа емес, өйткені туындының белгісі мен функцияның монотондылығының арасындағы қатынасты бірден суреттеуге болады. Сонымен қатар, бұл теореманың университеттік математикалық анализдегі графикалық иллюстрациясы күрделі.

Математикалық анализ элементтеріне қатысты материалды ұсынудың қатаңдық деңгейін таңдау тұжырымдамасы бірнеше ережелердің үйлесімі арқылы анықталуы керек:

1. Егер пәнде қолданылған кейбір бекітулер, негізінен, мектеп курсына дәлелденбесе, онда ол дәлелсіз қабылданады.

2. Егер мектеп курсына белгілі бір тұжырым принцип бойынша дәлелденетін болса, бірақ бұл дәлелдеу жасанды, техникалық күрделі және маңызды дамытушылық мәні болмаса, онда ол берілмейді.

3. Мектеп курсына мәлімдеме принципті түрде дәлелденетін болса және бұл дәлелдеудің дамытушылық мәні болса, онда ол теореманы дәлелдеуден бұрын емес, кейін беріледі.

Математикалық анализ элементтеріне берілген стандартты емес есептерді шешу жолдарын білім алушылармен бірге қарастыру үшін «Қолданбалы есептерді шешуде туындыны қолдану» тақырыбында педагогикалық эксперимент жүргізілді. Эксперимент барысында оқушылар туындыны пайдаланып қолданбалы есептерді шығаруды, функцияның сегменттегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу, дененің бір уақыттағы лездік жылдамдығы, дененің үдеуі, графикке жанама теңдеуін есептеуді, жазуды үйренді. Эксперимент есептерді шешу практикумы әдісімен жүзеге асырылды. Эксперимент барысында, білім алушылармен әңгімелесу орын алды, презентация жасалды, тәжірибелік есептердің шешу жолдары қарастылырды.

Эксперимент соңында білім алушылар:

– білуі керек: туындының анықтамасын, туындының физикалық және геометриялық мағынасын, туындыны табу ережесін;

– істей алуы керек: туындыны табу, туындыны пайдаланып стандартты емес және олимпиадалық есептерді шығару .

Эксперименттік жұмыс барысында біз: 11-сыныптың олимпиадалық резервтегі оқушыларымен және математика пәні мұғалімдерімен әңгіме жүргіздік. Мұғалімдердің алгебра және анализ бастамалары, геометрия пәні бойынша жүргізіп жатқан сабақтарына қатыстық. Математикалық анализ элементтеріне берілген стандартты емес есептерден құралған бақылау жұмыстарын алдық.

Зерттеу нәтижесінде оқушылардың стандартты емес есептерді шешу дағдыларын жеткіліксіз меңгергендігі, мектептегі алгебра және анализ бастамалары курсы бойынша білім деңгейінің төмендігі анықталды.

10–11-сыныптарда бақылау жұмыстарын алғаннан кейін математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу бойынша білім деңгейі төмендегідей болды (1-кесте):

1-кесте – Математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу бойынша білім деңгейі

Деңгейлері	10–11-сынып оқушыларының білім көрсеткіштері
Төмен	55%
Орта	37%
Жоғары	8%

1-кестедегі мәліметтерге қарағанда, математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу бойынша оқушылардың 55%-ының білім деңгейі төмен, 37%-ының білім деңгейі орташа, тек 8%-ы мектеп материалын жеткілікті деңгейде меңгергенін көруге болады.

Алынған бақылау жұмысының нәтижелері негізінде математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу жолдары көрсетілген материал бойынша қалыптастырушы эксперимент ұйымдастырылды. Экспериментке екі түрлі мектептен оқушылар қатыстырылды. Себебі бір мектептен білім сапасы шамалас 2 сынып табу қиынға соқты. Сонымен, экспериментке Түркістан қаласындағы «Ж. Ташенов атындағы №23 ІТ-мектеп-лицейі» КММ 11-сыныбының олимпиадалық резерві (бақылау тобы ретінде, оқушы саны – 11) мен «С. Сейфуллин атындағы №4 мектеп-лицейі» КММ 11-сыныбының олимпиадалық резерві (эксперименттік топ ретінде, оқушы саны – 9) оқушыларына жасалды.

Математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу жолдары сабақтары арнайы әзірленген әдістеме бойынша өткізілді. Ең алдымен анализ бастамаларын оқыту барысында оқушылардың алған білім деңгейін «теңестіру» қажет болды. Алгебра және анализ бастамаларын қайталау курсы әзірленді. Сондай-ақ, сабақтардың міндеттеріне білім алушылардың өздік жұмысын ұйымдастыру, олардың алда болатын олимпиадалық байқауларға дайындығына бағыттау кірді. Математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу жолдарын үйрету үдерісінде оқу үрдісін саралау әдістері қолданылды. Шынында да, микротоптарда жұмыс істей отырып, «әлсіздерге» кеңесші міндеттерін орындай отырып, білім алушылар танымдық әрекетті ұйымдастыра білу, тапсырмалардың күрделілік деңгейін дұрыс анықтауды және шешу үшін қажетті әдістерді таңдауды үйрену қажет екеніне сенімді болды. Сондықтан білім алушылардың өзіндік жұмысына теориялық сипаттағы да, практикалық мазмұндағы да қосымша тапсырмалар жүйелі түрде ұсынылды.

Қалыптастырушы эксперимент нәтижесінде эксперименттік топ студенттері бақылау тобымен салыстырғанда біз белгілеген оқу үлгерімінің сапасын жақсартты (2-кесте).

2-кесте – Бақылау бөлімдерінің нәтижелері бойынша оқушылардың білім сапасының өзгеру динамикасы

Топтар	Бағалар				Білім сапасы
	10–8 балл арасы	7–6 балл арасы	5–3 балл арасы	2–1 балл арасы	
1-бақылау жұмысы					
ЭТ	1	2	4	2	33%
БТ	1	3	5	2	36%
2-бақылау жұмысы					
ЭТ	1	3	4	1	44%
БТ	0	4	5	2	36%
3-бақылау жұмысы					
ЭТ	2	3	3	1	55%
БТ	1	4	4	2	45%

Кестеде келтірілген мәліметтерге қарағанда, эксперименттік топта оқу үлгерімінің сапасы айтарлықтай артқанын, ал бақылау тобында – өзгеріссіз келіп, соңынан сәл көтерілгенін байқауға болады.

Бақылау нәтижелерінде эксперименттік топтағы оқу үлгерімінің сапасының 33%-дан 55%-ға дейін айтарлықтай жақсарғанын көрсетеді.

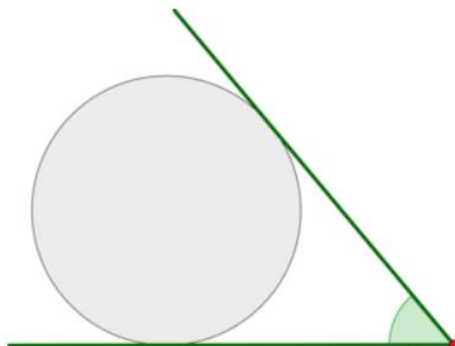
Эксперименттік-педагогикалық жұмыстардың нәтижелері әзірленген әдістеменің тиімді екенін және математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу жолдарын үйрету үдерісінде білімді неғұрлым толық меңгеруге ықпал ететінін көрсетті. Эксперимент нәтижесінде зерттеуге қатысқан 10-сынып оқушыларының «Туынды», «Туындының қолданылуы» тақарыптары бойынша білім сапасы 22% дейін артқаны байқалды. Сабақта математика пәні мұғалімдері алгебра және анализ бастамалары бойынша оқу материалын ұсынудың әртүрлі әдістерін қолдана отырып, дарынды оқушылардың потенциалын айтарлықтай өсіре алады.

Төменде эксперимент барысында қарастырылған мысалдар көрсетілді.

Мысал 1: $(y - x^2 - 3x + 10)(y + x^2 + 3x - 10) = 0$

теңдеуі арқылы берілген қисық $x \in [-5; 2]$ үшін $A(5, 25; -5, 75)$ нүктесінен анықталатын бұрыштың тангенсін табыңыз [12].

Шешуі: 1-суретте шеңбердің берілген нүктеден көрінетін бұрышы көрсетілген.

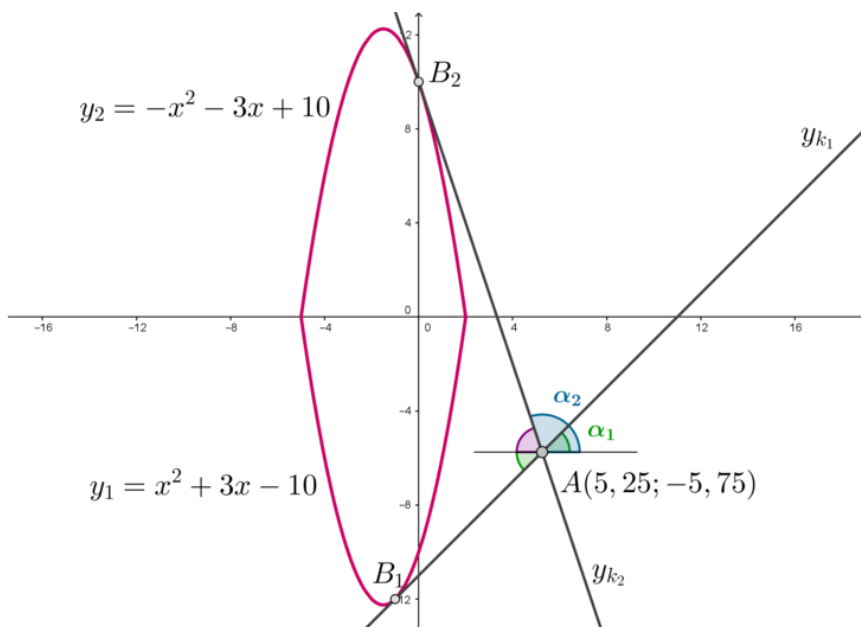


1-сурет – Шеңбердің берілген нүктеден көрінетін бұрышы

Координаталық жазықтықта теңдеудің графигін салайық. $x \in [-5; 2]$ болғанда мына жүйені алуға болады:

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 10 \\ y = -x^2 - 3x + 10 \end{cases}$$

Екі теңдеудің графигері x осін $(-5; 0)$ және $(2; 0)$ нүктелерінде қиып өтетін параболалар болып табылады. Сонымен, графикке A нүктесінен екі жанама сызып, ішкі аймақта график орналасқан осы жанамалардың арасындағы бұрыштың тангенсін табу керек.



2-сурет – Теңдеулердің графигері мен оларға жүргізілген жанама

2-суретте B_1 нүктесінде y_{k1} түзуі y_1 -ге жанама, ал y_{k2} түзуі B_2 нүктесінде y_2 - ге жанама болсын. Сонда абсцисса осіне параллель A нүктесі арқылы түзу жүргізілсе, онда α_1 –

y_{k1} жанаманың көлбеу бұрышы, ал $\alpha_2 - y_{k2}$ жанамасының абсцисса осінің оң бағытына көлбеу бұрышы. Сонда график орналасқан ішкі ауданындағы жанамалардың арасындағы бұрыш $\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2)$ -ге тең болады.

Жанамалардың теңдеулерін табайық.

$$1) \quad y_{k1} : y_1' = 2x + 3,$$

сәйкесінше, егер x_1 байланыс нүктесі болса, онда

$$y_{k1} = x_1^2 + 3x_1 - 10 + (2x_1 + 3)(x - x_1)$$

Тангенс $A(5,25;-5,75)$ нүктесі арқылы өтетіндіктен мына теңдеуді аламыз:

$$-5,75 = x_1^2 + 3x_1 - 10 + (2x_1 + 3)(5,25 - x_1) \Rightarrow 2x_1^2 + 21x_1 - 23 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 = 11,5 \end{cases}$$

y_1 графигі тек $x \in [-5;2]$ үшін анықталғандықтан, онда $x_1 = -1$ қолайлы. Демек, жанاما теңдеу келесі түрде шықты:

$$y_{k1} = x - 11$$

2) y_{k2} теңдеуін де осы жолмен тауып аламыз:

$$y_{k2} = -3x + 10$$

Демек, бұл дегеніміз

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -3 \Rightarrow \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2) = 3$$

Сәйкесінше,

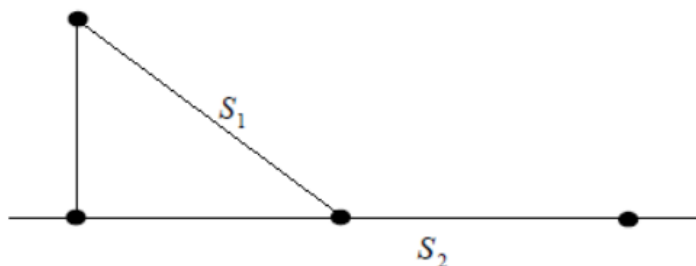
$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2)}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2)} = \frac{1 + 3}{1 - 1 \cdot 3} = -2$$

Мысал 2:

Шаңғы базасы жолдың ең жақын нүктесінен 9 км қашықтықта орналасқан. Мақсат базадан аталған нүктеден 15 шақырым жерде орналасқан қалаға жетуі керек. Мақсаттың қар басқан жолда жылдамдығы 8 км/сағ, ал тегіс жолда 10 км/сағ. Қалаға баратын жолды түзу деп есептесек, қалаға қысқа мерзімде жету үшін жолдың қай нүктесіне баруы керек[12]?

Шешуі:

Есеп шарты бойынша сызба сызайық:



3-сурет – Мақсат жүріп өткен жолдың сызбасы

Белгілермен таныстырайық: В – шаңғы базасы, С – қала, L– жол, V_1 - қар басқан жолдағы жылдамдық, V_2 – тегіс жолдағы жылдамдық.

Тұрақтылар мен айнымалыларды белгілейік: тұрақтылар – ВА, АС, V_1, V_2 ; айнымалылар - AD, DC, BD.

x - AD болсын, мұндағы $0 \leq x \leq 15$. Пифагор теоремасын пайдаланып, BD таба аламыз.

$$S_1 = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{81 + x^2}$$

Олай болса

$$S_2 = DC = 15 - x$$

Физика курсынан қашықтықты табу формуласын еске түсіре отырып $S = V \cdot t$

уақытты $t = \frac{S}{v}$ түрінде өрнектеп алайық. Сонымен Мақсат S_1 жолын $t_1 = \frac{\sqrt{81+x^2}}{8}$

уақытта, ал S_2 жолын $t_2 = \frac{15-x}{8}$ уақытта жүріп өтеді.

Демек, S_1 және S_2 жолдарына жұмсалған уақыт:

$$t(x) = \frac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \frac{15-x}{10}$$

Есепте қалаға қысқа мерзімде жету үшін жол нүктесін табу қажет болғандықтан, есептің жауабын көрсету мақсатында функцияның $[0, 15]$ кесіндісіндегі ең кіші мәнін табу керек.

$$t'(x) = \frac{(\sqrt{81+x^2})' \cdot 8 - 8' \cdot \sqrt{81+x^2}}{8^2} \cdot (81+x^2) + \frac{(15-x)' \cdot 10 - 10' \cdot (15-x)}{10^2} =$$

$$= \frac{8 \cdot 2x}{64 \cdot 2\sqrt{81+x^2}} + \frac{-10}{100} = \frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10}$$

$$t'(x) = 0: \frac{x}{8\sqrt{81+x^2}} - \frac{1}{10} = 0$$

Келесі кезекте кризистік нүктелерді табу керек:

$$5x - 4\sqrt{81+x^2} = 0$$

$$5x = 4\sqrt{81+x^2}$$

$$25x^2 = 16(81+x^2)$$

$$9x^2 = 1296$$

$$x^2 = 144$$

Теңдеудің шешімі: $x_1 = 12$, $x_2 = -12$.

$x_2 = -12$ шешімі есеп шартын қанағатандырмайды, өйткені берілген кесіндіге тиісті емес.

Енді $x = 0$, $x = 12$, $x = 15$ нүктелеріндегі функция мәндерін есептейік.

$$t(0) = \frac{\sqrt{81+0^2}}{8} + \frac{15-0}{10} \approx 2.625$$

$$t(12) = \frac{\sqrt{81+12^2}}{8} + \frac{15-12}{10} \approx 2.175$$

$$t(15) = \frac{\sqrt{81+15^2}}{8} + \frac{15-15}{10} \approx 2.187$$

Функция $x = 12$ нүктесінде ең кіші мәнге ие болады:

$$15-12=3\text{км.}$$

Жауап: Мақсат қалаға қысқа мерзімде жету үшін шаңғы базасынан 3 км және жолдан 12 км қашықтықтағы нүктеге баруы керек.

Қорытынды

Бұл мақала 10–11-сыныптарда математикалық анализ элементтеріне байланысты стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу жолдарын қарастыруға бағытталған.

Бұл жұмыста ұсынылып отырған материал білім алушыларға қызықты әрі қажетсіз қиындықтардан шығатын жол болатындай етіп жоспарланған, жоғарыда атап өткендей, туынды күрделі мәселелерді зерттеудің ең қуатты құралдарының бірі болып табылады.

Әртүрлі құбылыстарды математикалық тұрғыдан зерттеу қабілеті туындыны зерттеуді қалыптастырады. Жалпы білім беретін мектеп түлегі туынды туралы түсінікке ие болу керек, сонымен қатар оны функцияларды зерттеуге қолдануы керек. Бірыңғай мемлекеттік емтихандарда, олимпиадаларда туындыны қолдануға байланысты тапсырмалар көптеп кездеседі.

Зерттеу нәтижесінде алынған мәліметтер, стандартты емес есептерді шешуде білім мен дағдыларды тереңдету және кеңейту арқылы білім алушылардың теориялық дайындық деңгейін арттыруға жол ашты. Сонымен қатар, оқушылардың математикалық қабілеттерін дамытып, математикаға тұрақты қызығушылықтарын қалыптастыру арқылы олардың шығармашылық әлеуетін арттыруға едәуір ықпал етті.

Зерттеу нәтижесін математиканы тереңдетіп оқытатын мектепте, лицейде немесе гимназиядағы факультативтік сабақтарда, дарынды оқушылармен жұмыс кезінде, оқушыларды олимпиадаға дайындау кезінде мұғалімдерге қосымша материал ретінде пайдалануға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Гусев В.А., Силаев Е.В. Методические основы дифференциации обучения математики в средней школе. – М.: Принт, 1996. – 131 с.
2. Баймұханов Б. Математика есептерін шығаруды үйрету. – Алма-Ата: Мектеп, 1983. – 143 б.
3. Медеуов Е.Ө. Қазақстан Республикасының орта мектептегі математикалық білім беру стандарттарын жобалаудың әдістемелік негіздері. – М.: изд-во ВШМФ «Авангард», 1996. – 334 с.
4. Жәутіков О.А. Математикалық анализ курсы: оқулық. – Алматы: Экономик, 2014. – 144 б.
5. Аширбаев Н.К., Нурмаганбетова Ж.А., Бекмолдаева Р.Б. Алгебрада квадраттық функцияларға қатысты физикалық мазмұнды есептерге талдау // Ясауи университетінің хабаршысы. – 2020. – №3 (117). – Б. 197–213. <https://doi.org/10.47526.2020/2664-0686.019>
6. Блох А.Я., Гусев В.А., Дорофеев Г.В. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
7. Чебышёв П.Л. Полное собрание сочинений: Математический анализ. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 412 с.
8. Латотин Л.А. Математика: учеб. пособие для 10-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2013. – 408 с.
9. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.2: задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). – М.: Мнемозина, 2014. – 264 с.
10. Алимов Ш.А., Колягин Ю.К., Ткачёва М.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10–11-классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.
11. Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень). – М.: Мнемозина, 2014. – 352 с.
12. Иванова Ж.В. О методическом обеспечении дисциплин «Математический анализ», «Современные главы математического анализа» // Инновационные технологии обучения физико-

математическим и профессионально-техническим дисциплинам: материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. – Мозырь, 2020. – Ч.1. – С. 40–41.

13. Сурин Т.Л. Сброник практических заданий по математическому анализу. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 52 с.

REFERENCES

1. Gusev V.A., Silaev E.V. Metodicheskie osnovy differenciatsii obucheniya matematiki v sredney shkole [Methodological bases of differentiation of teaching mathematics in secondary school]. – M.: Print, 1996. – 131 s. [in Russian]
2. Baimuhanov B. Matematika esepeterin shygarudy uiretu [Learning to solve mathematical problems]. – Alma-Ata: Mektep, 1983. – 143 b. [in Kazakh]
3. Medeyov E.O. Qazaqstan Respyublikasynyn orta mekteptegi matematikalыq bilim bery standarttaryn jobalaydyn adistemelik negizderi [Methodological bases of designing standards of mathematical education in secondary schools of the Republic of Kazakhstan]. – M.: izd-vo VShMF «Avangard», 1996. – 334 b. [in Kazakh]
4. Jautikov O.A. Matematikalыq analiz kursy: oqulyq [Mathematical analysis course]. –Almaty: Ekonomik, 2014. – 144 b. [in Kazakh]
5. Ashirbayev N.K., Nurmaganbetova J.A., Bekmoldaeva R.B. Algebrada kvadrattyq funktsionaldga qatysty fizikalыq mazmundy esepterge taldaу // Iasau universitetinin habarshysy. –2022. – №1(123). – B. 197–213. <https://doi.org/10.47526/2022-1/2664-0686.08> [in Kazakh]
6. Blox A.Ia., Gysev V.A., Dorofeev G.V. Metodika prepodavaniya matematiki v srednei shkole: chachnaia metodika [Methods of teaching mathematics in secondary school: private methodology]: ucheb. pocobie dlia studentov ped. in-tov po fiz.-mat. spec. – M.: Prosveshenie, 1987. – 416 s. [in Russian]
7. Chebyshev P.L. Polnoe sobranie sochineniy: Matematicheskiy analiz [Complete works: Mathematical Analysis]. – M.: Izd-vo AN SSSR, 1948. – 412 s. [in Russian]
8. Latotin L.A. Matematika: ucheb. pocobie dlia 10-go kl. uchrejdeniy obsh. sred. obrazovaniya s rus. iaz. obucheniya [Mathematics]. – Minsk: Adukasyya i vyhavanje, 2013. – 408 s. [in Russian]
9. Mordkovich A.G. Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass. V 2 ch. Ch. 2: zadachnik dlia uchashihsia obsheobrazovatelnyh organizatsiy (bazovyi i uglublennyyi urovni) [Mathematics: algebra and the beginnings of mathematical analysis, geometry. Algebra and beginning of mathematical analysis]. – M.: Mnemozina, 2014. – 264 s. [in Russian]
10. Alimov Sh.A., Koliagin Iu.K., Tkachiova M.V. Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometria. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11-klassy: uchebnik dlia obsheobrazovatelnyh organizatsiy: bazovyi i uglublennyyi urovni [Mathematics: algebra and principles of mathematical analysis, geometry. Algebra and beginning of mathematical analysis]. – M.: Prosveshenie, 2016. – 463 s. [in Russian]
11. Vilenkin N.Ia. Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometria. Algebrа i nachala matematicheskogo analiza. 10 klacc: uchebnik dlia uchashihcia obsheobrazovatelnyh organizatsiy (uglublennyyi uroven) [Mathematics: algebra and principles of mathematical analysis, geometry. Algebra and beginning of mathematical analysis]. – M.: Mnemozina, 2014. – 352 s. [in Russian]
12. Ivanova J.V. O metodicheskoy obespechenii diciplin «Matematicheskiy analiz», «Sovremennyye glavy matematicheskogo analiza» [On the methodological support of the disciplines “Mathematical Analysis”, “Modern Chapters of Mathematical Analysis”] // Innovatsionnyye tehnologii obyeniya po fiziko-matematicheskim i professionalno-tehnicheskim disciplinam: materialy XII Mejdunar. nauch.-prakt.konf. – Mozyr, 2020. – Ch.1. – S. 40–41. [in Russian]
13. Surin T.L. Sbronik prakticheskikh zadaniy po matematicheskomy analizu. Differentsialnoe i integralnoe ischislenie funktsiy mnogih peremennykh [Collection of practical tasks in mathematical analysis. Differential and integral calculus of functions of many variables]. – Vitebck: VGU imeni P.M. Masherova, 2016. – 52 s. [in Russian]