

Д.Н. НУРГАБЫЛ<sup>1</sup>✉, Б.Б. САТКУЛОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>доктор физико-математических наук, профессор

Жетысуский университет имени И. Жансугурова  
(Казахстан, г. Талдықорган), e-mail: kebek.kz@mail.ru

<sup>2</sup>PhD докторант Жетысуского университета имени И. Жансугурова  
(Казахстан, г. Талдықорган), e-mail: bbs.tamyr@gmail.com

## ФОРМИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ В КОНТЕКСТЕ ПРОГРАММНОЙ КОНЦЕПЦИИ PISA-2021

**Аннотация.** В данной статье с помощью результатов проведенного педагогического экспериментального исследования были выявлены образовательные проблемы, возникающие у учителей в процессе обучения школьников математической грамотности: низкая доля практико-ориентированных задач от общего числа учебных задач школьной математики, предназначенных для 15-летних школьников, пассивное отношение учителей к вопросам формирования у школьников математической грамотности. Анализ экспериментальных данных позволил заключить о недостаточности знаний и умений у учителей по вопросам сведения стандартной задачи школьного курса математики к проблемным ситуациям в контексте оценочных задач PISA, составления систем заданий к этим задачам, содержащих алгоритм решения искомой задачи, описания наглядного объекта, позволяющий визуализацию поставленной задачи. Для решения названных проблем в работе предлагается применить модульную технологию в процессе обучения школьников математической грамотности, алгоритмический метод редукции стандартной задачи к оценочно-обучающим заданиям в контексте программной концепции PISA-2021. В работе рассматриваются задания к проблемной ситуации, как объекты мыслительной деятельности учащихся, выделены основные компоненты «Математического рассуждения» школьника. А именно: распознает область задания, вычленяет основные составляющие заданий; подводит данные под известные понятия; устанавливает междисциплинарные связи; применяет индукцию и междисциплинарные знания в составлении математической модели; решает математическую задачу; интерпретирует, оценивает решение в контексте рассматриваемого явления. Анализ алгоритмов решения заданий позволил выделить следующие ключевые структурные компоненты математической грамотности: понимания контекста заданий; умения устанавливать соответствия между различными объектами; применять индукции и знания; строить математические модели; находить решения математических моделей заданий, интерпретировать и оценивать полученные решения; обладать навыками математического рассуждения. Заключительное экспериментальное исследование

### \*Цитируйте нас правильно:

Нургабыл Д.Н., Саткулов Б.Б. Формирование и развитие математической грамотности в контексте программной концепции PISA-2021 // Ясауи университетінің хабаршысы. – 2024. – №1 (131). – Б. 267–281. <https://doi.org/10.47526/2024-1/2664-0686.22>

### \*Cite us correctly:

Nurgabyly D.N., Satkulov B.B. Formirovanie i razvitie matematicheskoi gramotnosti v kontekste programmnoi koncepcii PISA-2021 [Formation and Development of Mathematical Literacy in the Context of PISA-2021 Program Concept] // Iasauy universitetinin habarshysy. – 2024. – №1 (131). – B. 267–281. <https://doi.org/10.47526/2024-1/2664-0686.22>

подтвердило эффективность разработанной методики формирования и развития математической грамотности у 15-летних школьников.

**Ключевые слова:** модульная технология обучения, математическая грамотность, алгоритмический метод обучения, мыслительные навыки, метод сведения задач, международные исследования PISA.

**Д.Н. Нұрғабыл<sup>1</sup>, Б.Б. Сатқұлов<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>физика-математика ғылымдарының докторы, профессор*

*І. Жансүгіров атындағы Жетісу университеті*

*(Қазақстан, Талдықорған қ.), e-mail: kebek.kz@mail.ru*

*<sup>2</sup>І. Жансүгіров атындағы Жетісу университетінің PhD докторанты*

*(Қазақстан, Талдықорған қ.), e-mail: bbs.mamyr@gmail.com*

### **PISA-2021 бағдарламалық тұжырымдамасы аясында математикалық сауаттылықты қалыптастыру және дамыту**

**Аңдатпа.** Ұсынылып отырған мақалада педагогикалық эксперименттік зерттеу нәтижелері берілген, алынған нәтижелер негізінде оқушыларды математикалық сауаттылыққа оқытуда мұғалімдер үшін келесі қиындықтардың туындағаны анықталды: 15 жастағы мектеп оқушыларына арналған мектеп математикасындағы оқу есептерінің жалпы санына қарағанда практикаға бағытталған есептер үлесінің төмендігі, мектеп оқушыларының математикалық сауаттылығын қалыптастыру жұмысына мұғалімдердің құлықсыздығы. Эксперименттік деректерді талдау мектеп математика курсының стандартты есептерін PISA бағалау тапсырмалары контекстінде проблемалық есептерге келтіре алу, осы есептерді шығару алгоритмін беретін тапсырмалар жүйесін құрастыра алу, есепті визуализациялауға мүмкіндік беретін көрнекі нысанды сипаттай алу тұрғысында мұғалімдердің білімі мен дағдылары жеткіліксіз деген қорытынды жасауға мүмкіндік берді. Аталған мәселелерді шешу үшін бұл мақалада мектеп оқушыларын математикалық сауаттылыққа оқыту үдерісінде модульдік оқыту технологиясын, PISA-2021 бағдарламасының тұжырымдамасы контекстінде стандартты есептерді бағалау-оқыту тапсырмаларына келтірудің алгоритмдік әдісін қолдану ұсынылды. Жұмыста проблемалық жағдаят тапсырмаларын оқушылардың ойлау іс-әрекетінің объектісі ретінде қарастыра отырып, оқушының «Математикалық пайымдауының» негізгі құрамдас бөліктері бөлініп алынды. Атап айтқанда: тапсырманың берілу аумағын таниды, тапсырмалардың негізгі құрамдас бөліктерін ажырата алады; мәліметтерді белгілі ұғымдарға сая біледі; пәнаралық байланыстарды орнатады; математикалық модельді құруда индукциялық, пәнаралық білімді пайдалана біледі; математикалық есепті шеше алады; қарастырылып отырған құбылыс аясында шешімді түсіндіре, бағалай алады. Тапсырмаларды шешу алгоритмдерін талдау математикалық сауаттылықтың келесі негізгі құрылымдық компоненттерін анықтауға мүмкіндік берді: тапсырмалар контекстін түсіну; әртүрлі объектілер арасындағы сәйкестіктерді орнату, индукция мен білімді қолдану, математикалық модельдер құру, тапсырмалардың математикалық модельдерінің шешімдерін таба алу, алынған шешімдерді түсіндіру және бағалау дағдылары; математикалық пайымдау қабілеттері. Қорытынды эксперименттік зерттеу 15 жастағы мектеп оқушыларының математикалық сауаттылығын қалыптастыру мен дамытудың әдістемесінің тиімділігі расталды.

**Кілт сөздер:** оқытудың модульдік технологиясы, математикалық сауаттылық, оқытудың алгоритмдік әдісі, ойлау дағдылары, есептерді саю әдісі, PISA халықаралық зерттеуі.

**D.N. Nurgabyl<sup>1</sup>, B.B. Satkulov<sup>2</sup>***<sup>1</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor  
Zhetysu University named after I. Zhansugurov  
(Kazakhstan, Taldykorgan), e-mail: kebek.kz@mail.ru**<sup>2</sup>PhD Doctoral Student of Zhetysu University named after I. Zhansugurov  
(Kazakhstan, Taldykorgan), e-mail: bbs.mamyr@gmail.com***Formation and Development of Mathematical Literacy  
in the Context of PISA-2021 Program Concept**

**Abstract.** This article presents the results of pedagogical experiments, which revealed educational problems that teachers face in the process of teaching mathematical literacy to schoolchildren: a low proportion of practice-oriented tasks in the total number of educational tasks in school mathematics intended for 15-year-old schoolchildren, a passive attitude of teachers to the formation of mathematical literacy among schoolchildren. The analysis of the experimental data made it possible to conclude that the knowledge and skills of teachers on the issues of reducing the standard task of the school mathematics course are insufficient to problem situations in the context of the PISA assessment tasks, compiling task systems for these tasks, containing an algorithm for solving the assigned problem, description of a visual object that allows the visualization of the task. To solve these problems, the paper proposes to apply a modular learning technology in the process of teaching schoolchildren mathematical literacy, an algorithmic method for reducing a standard task to assessment-learning tasks in the context of the PISA-2021 program concept. In the work, examining the task to the problem situation as an object of mental activity of students, the main components of the "Mathematical Reasoning" of the student are highlighted. Namely: recognizes the area of the task; singles out the main components of the tasks; to bring data under known concepts; establishes interdisciplinary links; applies induction, interdisciplinary knowledge in the preparation of a mathematical model; solves a mathematical problem; interprets, evaluates the solution in the context of the phenomenon under consideration. The analysis of algorithms for solving tasks made it possible to identify the following key structural components of mathematical literacy: understanding the context of tasks; the ability to establish correspondences between various objects, apply induction and knowledge, build mathematical models, find solutions to mathematical models of tasks, interpret and evaluate the solutions obtained; have mathematical reasoning skills. The final experimental study confirmed the effectiveness of the developed methodology for the formation and development of mathematical literacy at 15 year old schoolchildren.

**Keywords:** modular learning technology, mathematical literacy, algorithmic teaching method, thinking skills, task reduction method, PISA international studies.

**Введение**

Многие исследователи подчеркивают, что ОЭСР (Организация Экономического Сотрудничества и Развития) в последние годы повысила свое влияние в глобальном управлении национальными системами образования [1]. Например, Нейман в своей статье [2], основываясь на анализе международных оценок, проводимые под эгидой ОЭСР, замечает, что такой особый непринужденный подход к управлению образованием может стать примером подражания для других образовательных систем. Наиболее влиятельной программой ОЭСР является – PISA (Programme for International Students Assessment) – Международная программа по оценке достижений учащихся [3]. Одним из её основных

направлений является определение уровня математической грамотности 15-летних школьников и студентов колледжа.

В мире с каждым годом растет исследовательский интерес к способам обучения школьников математической грамотности с целью повышения учебных достижений у учащихся в рамках экзаменов PISA, и их возможному включению в свои образовательные программы. Например, различные научные сообщества США предлагают разработать практико-ориентированную образовательную концепцию среднего и высшего образования, направленную на интегрирование математических, политехнических и естественных знаний, технологии, искусства и инженерии [4, 5].

В исследовании Abu Bakar [6] обсуждаются достижения учащихся Малайзии в соответствии с введением обучения в контексте навыков 21-го века. В работе M. Saarela [7] рассматриваются вопросы сотрудничества между школьником и учителем школ Финляндии в процессе их подготовки к экзаменам PISA.

В статье Н. Ві [8] приведена классификация эффективности циклов PISA, новое понимание обучения, позволяющее расставить приоритеты в педагогической деятельности учителя по повышению реальной успеваемости учащихся в контексте экзаменов PISA.

В исследованиях Н. Retnawati [9], J. Jailani [10] описана динамика развития основных навыков математической грамотности школьников в зависимости их принадлежности к классу, и от уровня и специфики школ. А также, обсуждались некоторые вопросы повышения у школьников уровня сформированности математической грамотности на основе эффективного использования учебного материала.

Анализ выше названных и других работ позволил заключить, что статистические аспекты PISA все больше привлекают внимание исследователей, а вопросы составления методологической базы обучения школьников математической грамотности в значительной степени остаются вне внимания исследователей. К таковым относятся методологические проблемы разработки проблемных ситуаций, составления заданий к ним в контексте экзаменационных заданий PISA.

Однако некоторые исследователи отмечают, что в контексте реализации концепции PISA в образовательных системах может иметь место принятие очень узких рамок образовательных ценностей, которые не всегда учитывают всю сложность процесса обучения [11].

Таким образом, заключаем о недостаточной разработанности теоретических и методологических основ методики составления практико-ориентированных задач, методики решения этих задач, способствующих формированию и развитию у школьников математической грамотности.

Практическая значимость этих проблем в образовательной деятельности учителей обусловили выбор цели и задачи исследования – формирование и развитие у школьников математической грамотности.

### **Методы исследования**

Для решения поставленной задачи мы применили эмпирические методы исследования: наблюдение, анализ, опрос, обобщение, письменная работа, математическая обработка данных.

С целью выработки теоретических основ формирования и развития математической грамотности у школьников нами был использован содержательный анализ научно-педагогических литератур, касающихся программной концепции PISA-2021 и международных экзаменов PISA, учебно-методической нормативной базы, относящиеся к процессу обучения школьников в нашей стране.

### Анализ и результаты

В программной концепции PISA-2021 математическая грамотность рассматривается, как способность школьника мыслить математически, формулировать математические задачи, применять, интерпретировать математику в разнообразных явлениях [3]. Анализ показал, что в исследовании PISA оценка математической грамотности осуществляется с помощью следующих взаимосвязанных инструментов:

- контекст задачи, в котором описывается проблемная ситуация;
- оценочные задания с математическим содержанием;
- наглядный объект, позволяющий визуализацию поставленной задачи.

1) Контекст задачи связан с практической или повседневной деятельностью человека. В оценивании PISA в основном используются 4 вида контекстов задач: личная жизнь человека, общественная, профессиональная, научная деятельности. При этом, рассматриваются следующие виды практико-ориентированных задач, различающихся по математическому содержанию: задачи на количественные отношения; задачи на изменение и отношения переменных; задачи на неопределенность и данные; задачи на пространства и формы.

Задачи на количественные отношения связаны с числовыми операциями, отношениями между ними. Задачи на изменения и отношения переменных могут быть математически описаны в виде функций, уравнений, графиков и таблиц. В задачах на неопределенность и данные рассматриваются вероятностные и статистические явления. В задачах на пространство и формы исследуются пространственные и плоские геометрические фигуры, формы и геометрические отношения.

2) Каждое математическое задание описывает проблемную ситуацию с определённой позиции и не содержат прямых подсказок на выбор способа, алгоритма решения этого задания, что обеспечивает осознанное применение школьниками приобретенных знаний. В заданиях обычно приводятся данные, которые являются достаточными для нахождения ответа на поставленный вопрос, и представляются в описании проблемной ситуации. Если для нахождения ответа на некоторое задание требуются дополнительные данные, то она приводится в контексте вопроса или дается отдельно.

Исследование показало, что эти оценочные задания содержат не только признаки оценивания математических знаний, но и содержат скрытый алгоритмический метод обучения школьников решению практико-ориентированных задач. В связи с этим, оценочные задания в контексте программной концепции PISA-2021 назовем оценочно-обучающими заданиями.

3) Каждый контекст заданий сопровождается математическими объектами (как число, функциональные соотношения), а также изображениями (как график, диаграмма, схема, таблица, рисунок), которые способствуют наглядному погружению школьников в проблемную ситуацию.

С целью выработки методологических основ методов формирования и развития математической грамотности у школьников нами были проведены экспериментальные исследования по определению отношения учителей к формированию у школьников математической грамотности, установлению доли практико-ориентированных задач от общего числа учебных задач школьной математики, предназначенных для 15-летних школьников.

Анализ результатов анкетирования учителей (32 учителя), выявил, что в основной массе учителя (71%) негативно относятся к вопросам формирования у школьников математической грамотности, обосновывая свои точки зрения тем, что формирование и развитие математических знаний и умений через решение стандартных учебных задач курса школьной математики само собой способствует развитию математической грамотности школьников.

Однако, анализ учебников по математике, используемых в школах Республики Казахстан, показал, что из общего числа учебных задач, изучаемых на уроках геометрии, доля практико-ориентированных задач составляет в среднем менее 3%, доля практико-ориентированных задач, изучаемых на уроках алгебры составляет, в среднем не более 15 %.

На следующей стадии исследования с целью выявления у 43 учителей математики умения решать задачи, способствующие формированию математической грамотности у школьников, были им предложены две задачи из учебника алгебры и геометрии и задания к ним:

- привести данные задачи к описанию проблемной ситуации в контексте оценочных задач PISA;
- сформулировать введение в проблемную ситуацию, носящий мотивирующий характер;
- сформулировать задания к поставленной проблемной ситуации;
- описать наглядный объект, для визуализации поставленной задачи, которая способствовала бы погружению школьников в проблемную ситуацию;

На основе анализа результатов выполнения этих заданий, мы установили, что учителя математики в основном (84%) не смогли свести стандартную задачу школьного курса математики к проблемным ситуациям в контексте оценочных задач PISA, составить задания к этим задачам, описывающие проблемную ситуацию, описать наглядный объект, позволяющий визуализацию поставленной задачи.

На этой же стадии исследования была проведена письменная работа с целью определения уровня сформированности математической грамотности у школьников. При этом, школьникам для решения были предложены 2 задачи и соответствующие задания к этим задачам. Математическая обработка выполненных школьниками письменных работ (57 работ) показали, что школьники (89%) в основном не смогли полноценно решить эти задачи.

Проведенное экспериментальное исследование, а также обзор результатов других исследований, касающиеся вопросам формирования математической грамотности у 15-летних школьников, позволяет сделать заключение о необходимости разработки методики обучения школьников математической грамотности, составлению учебно-методических средств обучения.

На начальной стадии исследования, основываясь на анализе международных исследований PISA [3], выделили *ключевые структурные компоненты* математической грамотности:

- 1) понимания контекста задачи и заданий, описывающих проблемную ситуацию;
- 2) умения устанавливать соответствия между различными объектами
- 3) умения применять индукцию, усвоенных знаний к решению математических заданий;
- 4) умения строить математические модели заданий и данной задачи;
- 5) умения находить решения математических моделей заданий и поставленной задачи;
- 6) умения интерпретировать полученные решения;
- 7) обладать навыками математического рассуждения, необходимые для понимания контекста задачи, применения знаний к решению заданий, установления связи между различными объектами, построения математических моделей заданий, нахождения решения заданий, интерпретирования и обобщения полученного решения.

Исследование показало, что математическое рассуждение школьников осуществляется с помощью следующих структурных объектов школьной математики:

- количество, числовые выражения, их алгебраические свойства, системы счисления;
- символическое, графическое представления, абстракция;
- алгебраические структуры, геометрические объекты, их закономерности;
- функциональные зависимости между величинами;

- математические модели;
- характеристики рассеяния выборок.

Как известно [12–14], математическое мышление проявляется в виде цепочек логических операций в процессе доказательства математических утверждений и решения задач. В связи с этим, рассматривая задания как объекты мыслительной деятельности учащихся, выделим ключевые компоненты «Математического рассуждения»:

- распознает область заданий и задач;
- вычленяет основные составляющие (условие и утверждение) задания;
- подводит данные под известные понятия;
- выявляет и устанавливает внутродисциплинарные и междисциплинарные связи между различными составляющими заданий;
- применяет индукцию, междисциплинарное знание к построению математической модели задания;
- распознает математическую модель;
- выбирает метод нахождения решения математической модели;
- решает задачу по известному алгоритму;
- устанавливает соответствие между решением задания и искомым элементом проблемной ситуации;
- интерпретирует найденное решение в контексте рассматриваемого явления;
- оценивает, обобщает, выявляет закономерности.

Таким образом, под математической грамотностью будем понимать способность школьников осуществлять математические рассуждения для распознавания, понимания проблемных ситуаций, подведения данных под математические понятия, составление и решение математических моделей, применения математические знания для описания, решения, интерпретации, оценки и прогнозирования различных явлений.

Особое место в формировании и развитии у школьников математической грамотности занимает методика обучения школьников. Поэтому вполне естественно, что эффективность формирования математической грамотности школьников непосредственно зависит от правильного выбора учебного материала, инструментов, средств и метода обучения школьников.

Решение практических задач является наиболее трудной частью деятельности школьников при изучении математики, обучение учащихся этому виду деятельности занимает одно из главных приоритетов в обновленном содержании среднего образования. Усвоить же математические знания и научиться их применять можно, лишь решая совокупность заданий к практическим задачам.

В связи с этим, к каждой задаче составляются задания для выполнения, которые способствуют формированию и развитию у школьников компонентов математической грамотности. Компоненты «Знание и понимание контекста задачи и заданий», «Применение усвоенных знаний к решению математических заданий» математической грамотности формируются решением стандартных заданий двух видов – с выбором однозначного ответа и с воспроизведением ответа (ответ записывается в виде числа, выражения, слова), при этом не требуется приводить алгоритм решения. Компоненты «Умение устанавливать связи между различными объектами», «Умение строить математические модели данных заданий», «Умение находить решение математических моделей заданий» формируются в процессе решения практико-ориентированных заданий, не требующих сложного уровня математизации.

Основные компоненты «Умение находить решение математических моделей поставленной задачи», «Умение интерпретировать полученное решение» формируются в процессе решения практико-ориентированных задач, требующих полное обоснование и

интерпретацию полученного решения. Компонент «Обладать навыками математического рассуждения» формируется в процессе формирования выше названных компонентов математической грамотности.

Таким образом, математическое рассуждение формируется с помощью специальных заданий, в которых учащиеся распознают, понимают, формулируют проблему, составляют математическую модель ситуации, решают математические модели явлений, приводят интерпретацию решения заданий и задач.

Результаты экспериментального исследования, анализ методов и практика обучения школьников решению практико-ориентированных задач в контексте исследований PISA позволили убедиться в том, что *модульная технология обучения* школьников является более результативным в вопросах формирования и развития математической грамотности школьников.

Данная технология модульного обучения ориентированы на разбивку учебного материала на отдельные взаимосвязанные блоки, которые взаимосвязаны между собой. Каждый блок состоит из нескольких стандартных и практико-ориентированных задач, которые логически связаны одной общей дидактической целью, направлены на формирование и развитие математической грамотности.

В связи с этим, на формирующем этапе педагогического эксперимента нами апробирована модульная технология обучения, направленная на формирование и развитие математической грамотности. На этом этапе разработали и внедрили в учебный процесс модуль по теме «Неравенства». Данный модуль предназначен для изучения раздела «Неравенства» курса алгебры учащимися 8 классов.

Приведем примеры использования модуля «Неравенства» в процессе обучения алгебре в контексте формирования и развития у школьников математической грамотности. Данный модуль состоит из четырех блоков (Таблица 1):

**Таблица 1 – Блоки модуля «Неравенства»**

1-блок	2-блок	3-блок	4-блок
Квадратные неравенства	Рациональные неравенства	Системы неравенств с одной переменной	Системы неравенств с двумя переменными

Каждый блок состоит из задач и заданий к ним, в которых все задачи и задания взаимосвязаны. Первая и вторая задача блока 1 являются вводными, где школьники самостоятельно добывают знания, используя учебник и систему заданий, применяя ранее усвоенные знания.

**Задача 1 к блоку 1.** Решите неравенство  $x^2 + 3x - 4 > 0$ .

Задание 1.1. Найдите корни трехчлена  $x^2 + 3x - 4$ .

Задание 1.2. Разложите на множители выражение  $x^2 + 3x - 4$ .

Задание 1.3. Решите неравенство  $x^2 + 3x - 4 > 0$ .

Задание 1.4. Найдите наименьшее положительное решение квадратного неравенства  $x^2 + 3x - 4 > 0$ .

*Формируемые компоненты математической грамотности:* Знание, понимание контекста заданий. Вычленение основных составляющих (условие и утверждение) заданий. Применение индукции, усвоенных знаний к решению математического задания (умение находить корни квадратного трехчлена, метод разложения на множители трехчлена, методы решения квадратных неравенств, использование найденного решения задания 1.3 к нахождению наименьшего положительного решения данного неравенства).



**Задача 2 к блоку 1.** Решите неравенство  $2x^2 + 5x - 12 \leq 0$ .

Задание 1.1. Найдите корни трехчлена  $2x^2 + 5x - 12$ .

Задание 1.2. Решите неравенство  $2x^2 + 5x - 12 \leq 0$

Задание 1.3. Найдите наибольшее целое решение неравенства  $2x^2 + 5x - 12 \leq 0$ .

*Формируемые компоненты математической грамотности:* Знание, понимание контекста заданий. Вычленение основных составляющих (условие и утверждение) заданий. Применение индукции, усвоенных знаний. Сравнение, использование алгоритма решения задачи 1 к нахождению наибольшего целого решения данного неравенства.

Таким образом, задачи 1 и 2 блока 1 направлены на формирование и развитие следующих компонентов математической грамотности:

- распознает, понимает контексты заданий и задач;
- вычленяет основные составляющие (условие и утверждение) заданий;
- применяет индукцию, усвоенные знания к нахождению решения заданий;
- знает методы решения квадратных неравенств;
- умеет выбирать частные решения квадратных неравенств;
- знает алгоритм решения квадратных неравенств.

Для формирования основных компонентов «Математического рассуждения» рассмотрим задачу 3 к блоку 1.

**Задача 3 к блоку 1.** Расстояние по руслу реки между двумя пристанями  $A$  и  $D$  равно 48 км. Теплоход прошел по течению из пристани  $A$  в пункт  $D$ . Спустя час после прибытия в пристань  $D$ , теплоход поплыл обратно в пункт  $A$ . Скорость течения реки 4 км/час. Какой должна быть собственная скорость теплохода, если время, затраченное на весь путь не должна превышать 7 часов?

Задание 3.1. Определите, какой компонент движения можно принять за переменную  $x$  ?

Задание 3.2. Представьте время, за которое теплоход прибыл в пристань  $D$  в виде выражения.

Задание 3.3. Представьте время, за которое теплоход прошел путь из пристани  $D$  в пункт  $A$  в виде выражения.

Задание 3.4. Представьте общее время, затраченное на весь путь в виде выражения.

Задание 3.5. Определите, какой должна быть собственная скорость теплохода, если время, затраченное на весь путь должна быть не более 7 часов?

*Формируемые компоненты математической грамотности:* Формирует проблему, умеет устанавливать связи между различными объектами, применять междисциплинарное знание, строить математическую модель данного задания, решать математические модели явлений, приводить интерпретацию решения задачи. Применяет математическое рассуждение для формулирования и решения проблемной задачи, интерпретирования и оценки решения задачи,

Таким образом, в процессе решения задачи 1–3 и заданий к ним формируются и развиваются следующие ключевые компоненты математического рассуждения:

- распознает, вычленяет основные составляющие (условие и утверждение) задания;
- выявляет и устанавливает связи между составляющими задания;
- применяет знание и индукцию к построению математической модели задания;
- распознает математическую модель;
- выбирает метод нахождения решения математической модели;
- решает задачу по алгоритму;
- устанавливает междисциплинарные связи между решением задания и искомым элементом проблемной ситуации;
- интерпретирует найденное решение в контексте рассматриваемого явления.

Такой подход в обучении обеспечивает освоение учащимися алгоритма решения поставленной задачи посредством выполнения заданий к данной проблемной ситуации, формирования компонентов математической грамотности.

**Задача 1 к блоку 4.** Изобразите множество точек на плоскости, удовлетворяющих неравенству  $6y + 3x \leq 15$ .

Задание 1.1. Постройте на плоскости график функции  $6y + 3x = 15$ .

Задание 1.2. Определите, координаты, какой точки  $(0,0)$  и  $(3,2)$  удовлетворяют неравенству  $6y + 3x \leq 15$ .

Задание 1.3. Обобщите решение задания 1.2. Изобразите множество точек на плоскости, удовлетворяющих неравенству  $6y + 3x \leq 15$ .

С целью иллюстрации обучающего и формирующего характера заданий к следующей практической задаче 2 блока 4, приведем подробное решение этих заданий, с указанием формируемых компонентов математической грамотности.

**Задача 2 к блоку 4.** Завод выпускает хрустальные вазы двух видов. На одну вазу первого вида расходуется 50 граммов диоксида кремния и 50 граммов оксида свинца, а на одну вазу второго вида расходуется 50 граммов диоксида кремния и 25 граммов оксида свинца. От продажи одной вазы первого вида завод получает прибыль 100 тенге, а от продажи одной вазы второго вида – 125 тенге. Сколько ваз каждого вида должна выпускать завод, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если завод планирует ежедневно использовать не более 30кг диоксида кремния и 25 кг оксида свинца?

*Задание 2.1.* Какие компоненты процесса изготовления ваз можно принять за переменные  $x$  и  $y$ ?

*Решение.* Количество ваз соответственно первого и второго видов, выпущенных заводом можно принять за переменные  $x$  и  $y$ .

*Формируемые компоненты математической грамотности:* понимает постановку задания, умеет устанавливать связи между различными объектами.

*Задание 2.2.* Заполните нижеследующую таблицу:

**Таблица – Виды и составы ваз**

Виды ваз	Диоксид кремния	Оксид свинца	Количество ваз
<i>I</i>			$x$
<i>II</i>			$y$

*Формируемые компоненты математической грамотности:* умеет применять междисциплинарные знания, имеет навыки установления соответствия между различными объектами.

*Задание 2.3.* Каким должен быть вес диоксида кремния для изготовления  $x$  и  $y$  ваз соответственно первого и второго видов, если завод планирует ежедневно использовать не более 30кг диоксида кремния?

*Решение.* Для изготовления ваз соответственно первого и второго видов потребуется  $50x + 50y$  диоксида кремния.

*Формируемые компоненты математической грамотности:* умеет выявлять аналогию, применять индукцию, междисциплинарное знание, интерпретировать вес диоксида кремния с помощью математического выражения.

*Задание 2.4.* Каким должен быть вес оксида свинца для изготовления  $x$  ваз первого вида и  $y$  ваз второго вида, если завод планирует ежедневно использовать не более 25 кг оксида свинца?

*Решение.* Для изготовления ваз соответственно первого и второго видов потребуется  $50x + 25y$  оксида свинца.

*Формируемые компоненты математической грамотности:* умеет выявлять аналогию, применять индукцию, междисциплинарное знание, интерпретировать вес оксида свинца с помощью математического выражения.

*Задание 2.5.* Какую прибыль получает завод от выпуска  $x$  ваз первого вида и  $y$  ваз второго вида (представьте значение прибыли в виде функции от двух переменных)?

*Решение.* От выпуска  $x$  ваз первого вида и  $y$  ваз второго вида завод получает прибыль  $z = 100x + 125y$ .

*Формируемые компоненты математической грамотности:* умеет выявлять аналогию, применять индукцию, междисциплинарное знание, устанавливать отношение и изменение переменных, строить математическую модель данного задания.

*Задание 2.6.* Приведите полный алгоритм решения задачи 3. В чем заключается решение задачи 3?

*Решение.* Пусть  $x$  и  $y$  – количество ваз соответственно первого и второго видов, выпущенных заводом. Для их изготовления потребуется  $50x + 50y$  диоксида кремния и  $50x + 25y$  свинца. В связи с тем, что в наличии имеются всего 30 000 граммов диоксида кремния и 25 000 граммов свинца, должна выполняться следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} 50x + 50y &\leq 30000, \\ 50x + 25y &\leq 25000 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Для графического решения первого линейного неравенства данной системы запишем уравнение, соответствующее выбранному неравенству и построим на плоскости  $XOY$  данную прямую. Данная прямая делит плоскость на две полуплоскости и выберем ту полуплоскость, координаты точек которой удовлетворяет данному неравенству. Далее, решая графически и второе неравенство, получаем множество точек расположенные внутри угла  $ABC$ , координаты которых удовлетворяет обоим неравенствам с двумя неизвестными. Тогда, с учетом неравенств  $x \geq 0, y \geq 0$ , получаем многоугольник  $ABCO$ . Решением этой системы будет множество точек, расположенных внутри многоугольника  $ABCO$  (Рис. 1).

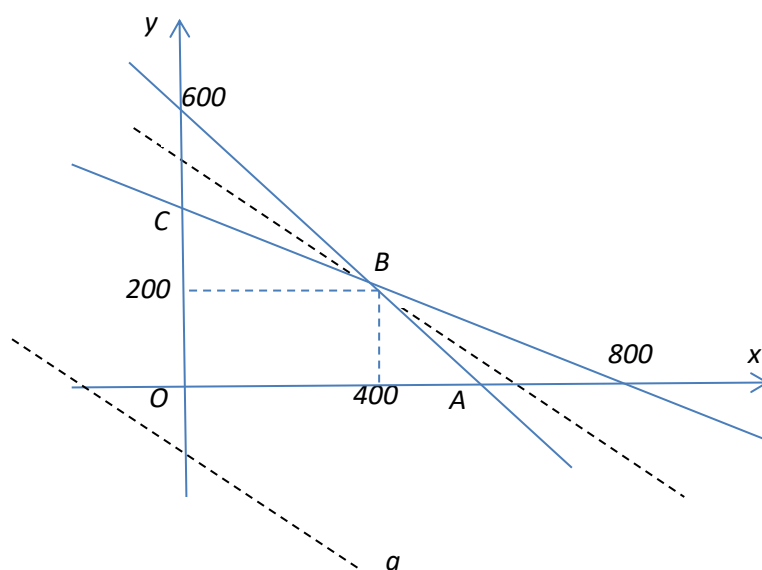


Рисунок 1 – Графическое решение системы

От выпуска  $x$  ваз первого вида и  $y$  ваз второго вида завод получает прибыль  $z = 100x + 125y$ . Решение задачи заключается в определении наибольшего значения линейной функции двух переменных  $z = 100x + 125y$ . Зафиксируем значение функции  $z = -50000$ , построим прямую  $a: 100x + 125y = -50000$ . При увеличении значений функции  $z$ , прямая перемещается параллельно в направлении многоугольника  $ABCO$ . При этом, убеждаемся, что точкой входа во множества точек многоугольника  $ABCO$  будет точка  $O$ , точкой *выхода* будет точка  $B$ . Следовательно, функция  $z = 100x + 125y$  достигает своего наибольшего значения в точке  $B(400, 200)$ .

Теперь вычисляя значение целевой функции  $z = 100x + 125y$  в точке  $B(400, 200)$ , получаем

$$z = 100 \cdot 400 + 125 \cdot 200 = 65000.$$

Итак, наибольшая прибыль равна 65000 тенге, и оно достигается при выпуске заводом вазы первого вида в количестве 400 штук и вазы второго вида в количестве 200 штук.

*Формируемые компоненты математической грамотности:* понимает постановку задачи, умеет применять индукцию, междисциплинарное и внутри дисциплинарное знания, строит математическую модель задачи, решать задачи на принятие решений, устанавливать динамику изменения линейного характера, интерпретировать и оценивать найденное решение в контексте рассматриваемой проблемной ситуации.

Решения заданий к задаче 2 блока 4 убеждают нас в том, что эти задания носят обучающий характер, способствуют формированию и развитию у школьников математической грамотности.

Итак, все блоки рассматриваемого модуля направлены на формирование у школьников новых знаний, на развитие математических рассуждений, алгоритмических навыков решения задач с практическим содержанием, мотивации к познанию и учению. Данная модульная технология обеспечивает поэтапное развивающееся обучение.

### Заключение

На заключительной стадии экспериментального исследования для определения эффективности разработанной методики обучения 15-летних школьников решению заданий PISA школьникам (58 учеников) и учителям (39 учителей) были предложены письменные работы для выполнения. При этом, школьникам для решения были предложены 2 задачи, носящий прикладной характер, и соответствующие задания к этим задачам. А учителям были предложены 2 стандартные задачи и следующие задания для выполнения:

- свести данную стандартную задачу к описанию проблемной ситуации в контексте оценочных задач PISA;
- сформулировать введение в проблемную ситуацию, носящий мотивирующий характер;
- описать наглядный объект, для визуализации поставленной задачи, которая способствовала бы погружению школьников в проблемную ситуацию;
- составить соответствующие подзадачи (задания) к двум данным практико-ориентированным задачам;
- определить, какие компоненты математической грамотности формируются у школьников в процессе решения данных задач.

Математическая обработка выполненных письменных работ показала следующие результаты:

- средний статический показатель сформированности математической грамотности у школьников составило: на входе 11%, на выходе 62%;
- средний статический показатель сформированности математической грамотности у учителей составил:

- по критерию «Умения свести данную стандартную задачу к описанию проблемной ситуации в контексте оценочных задач PISA» – на входе 16%, на выходе 83%.

- по критерию «Умения формулировать введение в проблемную ситуацию, носящий мотивирующий характер» – на входе 37%, на выходе 91%.

- по критерию «Умения описать наглядный объект, для визуализации поставленной задачи, которая способствовала бы погружению школьников в проблемную ситуацию» – на входе 41%, на выходе 96%.

- по критерию «Умения определять компоненты математической грамотности у школьников, формируемые в процессе решения данной задачи» – на входе 5%, на выходе 67%.

Таким образом, результаты педагогического исследования показали, что эффективность формирования и развития математической грамотности у школьников напрямую зависит от мотивации школьников, содержания учебных задач, качества учебно-методических материалов и методов обучения, от научно-педагогической подготовленности, заинтересованности учителей.

Педагогический эксперимент подтвердил эффективность разработанной методики формирования и развития математической грамотности у 15-летних школьников. Предложенная модульная технология обучения может быть использована учителями, при проведении оценки сформированности математической грамотности у школьников по разделу учебной программы.

*Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19676696).*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. OECD. The Future of Education and skills, Education 2030. [Электронный ресурс]. URL: [https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20\(05.04.2018\).pdf](https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf) (дата обращения 12.01.2023)
2. Niemann D., Martens K. Soft governance by hard fact? The OECD as a knowledge broker in education policy // Global Social Policy. – 2018. – №18(3). – P. 267–283. DOI: 10.1177/1468018118794076
3. PISA 2021. PISA 2021 Mathematics Framework (Draft). [Электронный ресурс]. URL: <chrome-extension://efaidnbnmnibpcjpcglclefindmkaj/https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf> (дата обращения 12.01.2023)
4. Wang H.H., Charoenmuang M., Knobloch N.A. et al. Defining interdisciplinary collaboration based on high school teachers' beliefs and practices of STEM integration using a complex designed system // International Journal of Stem Education. – 2020. – №7(3). – С. 1–17. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0201-4>
5. Lee J., Park D. Do American and Korean education systems converge? Tracking school reform policies and outcomes in Korea and the USA // Asia Pacific Education Review. – 2014. – №15(3). – P. 391–399. DOI: 10.1007/s12564-014-9325-x
6. Abu Bakar M.A., Ismail N. Exploring students Metacognitive Regulation skills and Mathematics Achievement in Implementation of 21<sup>st</sup> Century Learning in Malaysia // Problems of Education in the 21<sup>st</sup> Century. – 2020. – №78 (3). – P. 314–327. DOI: 10.33225/pec/20.78.314
7. Saarela M., Karkkainen T. Knowledge Discovery from the Programme for International Student Assessment // Learning Analytics: Fundamentals, Applications, and Trends: A view of the Current State of the Art to Enhance E-Learning. – 2017. – №94. – P. 229–267. DOI: 10.1007/978-3-319-52977-6\_8
8. Bi H.H. Benchmarking the international compulsory education performance of 65 countries and economies: Findings from PISA 2006, 2009, and 2012 // Benchmarking-an International Journal. – 2018. – №25(1). – P. 98–119. DOI: 10.1108/BIJ-09-2016-0144

9. Retnawati H., Wulandari N.F. The Development of students' mathematical literacy Proficiency // *Problems of Education in the 21st Century*. – 2019. – №77(4). – P. 502–514. DOI: 10.33225/pec/19.77.502
10. Jailani J., Retnawati H., Djidu H., et al. Mathematical literacy Proficiency Development Based on Content, Context, and Process // *Problems of Education in the 21st Century*. – 2020. – №78(1). – P. 80–101. DOI: 10.33225/pec/20.78.80
11. Addey C. Golden relics & historical standards: how the OECD is expanding global education governance through PISA for Development // *Critical Research in Education*. – 2017. – №58 (3). – P. 311–325. DOI:10.1080/17508487.2017.1352006
12. Мубарақов А.М., Атаев Б.К., Мусайбеков Р.К. Геометриялық есептерді шешуде оң сыңар ми қызметінің ерекшеліктерін қолдану // *Қарағанды университетінің хабаршысы. Педагогика сериясы*. – 2018. – №4. – Б. 31–38.
13. Алибекова Ж.Д., Мейрбекова Г.П., Кошанова Г.Д. Математикалық модельдеу әдісін қолдану арқылы оқушылардың математикалық ойлау қабілетін қалыптастыру // *Ясауи университетінің хабаршысы*. – 2022. – №4(126). – Б. 212–224.
14. Виленкин Н.Я., Блох А.Я., Таварткиладзе Р.К. Воспитание мыслительных способностей учащихся в процессе обучения математике. В кн.: *Современные проблемы методики преподавания математики*. – М.: Просвещение, 1985. – С. 201–221.

#### REFERENCES

1. OECD. The Future of Education and skills, Education 2030. [Электронный ресурс]. URL: [https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20\(05.04.2018\).pdf](https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf) (дата обращения 12.01.2023)
2. Niemann D., Martens K. Soft governance by hard fact? The OECD as a knowledge broker in education policy // *Global Social Policy*. – 2018. – №18(3). – P. 267–283. DOI: 10.1177/1468018118794076
3. PISA 2021. PISA 2021 Mathematics Framework (Draft). [Электронный ресурс]. URL: <chrome-extension://efaidnbnmnibpcjpcglclefindmkaj/https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf> (дата обращения 12.01.2023)
4. Wang H.H., Charoenmuang M., Knobloch N.A. et al. Defining interdisciplinary collaboration based on high school teachers' beliefs and practices of STEM integration using a complex designed system // *International Journal of Stem Education*. – 2020. – №7(3). – С. 1–17. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0201-4>
5. Lee J., Park D. Do American and Korean education systems converge? Tracking school reform policies and outcomes in Korea and the USA // *Asia Pacific Education Review*. – 2014. – №15(3). – P. 391–399. DOI: 10.1007/s12564-014-9325-x
6. Abu Bakar M.A., Ismail N. Exploring students Metacognitive Regulation skills and Mathematics Achievement in Implementation of 21<sup>st</sup> Century Learning in Malaysia // *Problems of Education in the 21<sup>st</sup> Century*. – 2020. – №78 (3). – P. 314–327. DOI: 10.33225/pec/20.78.314
7. Saarela M., Karkkainen T. Knowledge Discovery from the Programme for International Student Assessment // *Learning Analytics: Fundamentals, Applications, and Trends: A view of the Current State of the Art to Enhance E-Learning*. – 2017. – №94. – P. 229–267. DOI: 10.1007/978-3-319-52977-6\_8
8. Bi H.H. Benchmarking the international compulsory education performance of 65 countries and economies: Findings from PISA 2006, 2009, and 2012 // *Benchmarking-an International Journal*. – 2018. – №25(1). – P. 98–119. DOI: 10.1108/BIJ-09-2016-0144
9. Retnawati H., Wulandari N.F. The Development of students' mathematical literacy Proficiency // *Problems of Education in the 21st Century*. – 2019. – №77(4). – P. 502–514. DOI: 10.33225/pec/19.77.502
10. Jailani J., Retnawati H., Djidu H., et al. Mathematical literacy Proficiency Development Based on Content, Context, and Process // *Problems of Education in the 21st Century*. – 2020. – №78(1). – P. 80–101. DOI: 10.33225/pec/20.78.80

11. Addey C. Golden relics & historical standards: how the OECD is expanding global education governance through PISA for Development // *Critical Research in Education*. – 2017. – №58 (3). – P. 311–325. DOI:10.1080/17508487.2017.1352006
12. Mubarakov A.M., Ataev B.K., Musaibekov R.K. Geometricalyq esepтерdi sheshude on synar mi qyzmetinin erekshelikтерin qoldanu [Using the features of the work of the right hemisphere in solving geometric problems] *Qaragandy universitetinin habarshysy. Pedagogika seriasy*. – 2018. – №4. – P. 31–38. [in Kazakh]
13. Alibekova J.D., Meyrbekova G.P., Koshanova G.D. Matematikalyq modeldeu adisin qoldanu arqyly oqushylardyn matematikalyq oilau qabiletin qalyptastyru [Formation of students' ability to think mathematically using the method of mathematical modeling] // *Iasau universitetinin habarshysy*. – 2022. – №4(126). – B. 212–224. [in Kazakh]
14. Vilenkin N.Ia., Bloh A.Ia., Tavartkiladze R.K. Vospitanie myslitelnyh sposobnostei uchashihsia v processe obuchenia matematike. V kn.: *Sovremennye problemy metodiki prepodavania matematiki* [Education of mental abilities of students in the process of teaching mathematics. In: Modern problems of methods of teaching mathematics]. – M.: Prosveshenie, 1985. – P. 201–221. [in Russian]