**ӘОЖ 517.988.68**
**МҒТАР 27.41.19**
**https://doi.org/10.47526/2024-4/2524-0080.13**

**Г.Б.Баканов[1], С.К.Мелдебекова[2]**
[1]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
*(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz*
[2] *докторант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
*(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz*

# ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН ДИСКРЕТТІ КЕРІ ЕСЕП ПЕН КӨМЕКШІ ЕСЕП ШЕШІМДЕРІНІҢ АРАСЫНДАҒЫ БАЙЛАНЫС
# RELATIONSHIP BETWEEN SOLUTIONS OF DISCRETE INVERSE AND AUXILIARY PROBLEMS FOR A HYPERBOLIC EQUATION
# СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ДИСКРЕТНОЙ ОБРАТНОЙ И ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

***Аңдатпа.*** *Гельфанд-Левитан әдісі бойынша гиперболалық теңдеу үшін кері есептерді шешудің бір өлшемді және көп өлшемді әдістері бірінші және екінші текті Фредгольм интегралдық теңдеулерінің сандық шешіміне әкеледі. Бұл жұмыста Гельфанд-Левитан әдісімен зерттелетін гиперболалық теңдеу үшін қойылған дискретті кері есеп пен дискретті көмекші есеп шешімдерінің арасындағы байланыс қарастырылады. Алдымен гиперболалық теңдеу үшін қойылған дискретті кері есеп пен дискретті көмекші есеп қойылымдары және осы есептердің шешімі болатын торлық фукнциялардың қасиеттері келтіріледі. Көмекші дискретті есептің шешімі арқылы анықталатын торлық функцияның құрылымы және осы торлық функция мен дискретті кері есептің шешімі болатын ізделінді торлық функция арасындағы байланыс туралы леммалар дәлелденеді. Леммаларды дәлелдеу барысында дискретті көмекші есептің шешімінің және Дирактың дельта функциясының дискретті аналогының қасиеттері ескеріледі. Дискретті кері есеп шешімінің бар болуы және оның жалғыздығын көрсететін теорема дәлелденеді.*
***Негізігі сөздер:*** *гиперболалық теңдеу, дискретті кері есеп, көмекші дискретті есеп, шешімнің қасиеттері.*

***Abstract.*** *One-dimensional and multidimensional methods for solving inverse problems for a hyperbolic equation by the Gelfand-Levitan method lead to the numerical solution of Fredholm integral equations of the first and second kind. This paper examines the connection between a discrete inverse problem and solutions to a discrete auxiliary problem for a hyperbolic equation studied by the Gelfand-Levitan method. First, we present the formulations of the discrete inverse problem and the discrete auxiliary problem for the hyperbolic equation, as well as the properties of the grid functions that are solutions to these problems. Lemmas are proved about the structure of the grid function determined by the solution of the auxiliary discrete problem, and the connection of this grid function with the desired grid function, which is the solution to the discrete inverse problem. When proving the lemmas, the properties of the solution to the discrete auxiliary problem and the discrete analogue of the Dirac delta function are taken into account. A theorem showing the existence of a discrete inverse problem solution and its uniqueness is proved.*
***Key words:*** *hyperbolic equation, discrete inverse problem, auxiliary discrete problem, properties of the solution.*

***Аннотация.*** *Одномерные и многомерные методы решения обратных задач для гиперболического уравнения методом Гельфанда-Левитана приводят к численному решению интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. В данной работе рассматривается связь между дискретной обратной задачей и решениями дискретной вспомогательной задачи для гиперболического уравнения, изучаемого методом Гельфанда-Левитана. Сначала приводятся постановки дискретной обратной задачи и дискретной вспомогательной задачи для гиперболического уравнения, а также свойства сеточных функций, являющихся решениями этих задач. Доказаны леммы о структуре сеточной функции, определяемой решением вспомогательной дискретной задачи, и связи этой сеточной функции с искомой сеточной функцией, являющейся решением дискретной обратной задачи. При доказательстве лемм учитываются свойства решения дискретной вспомогательной задачи и дискретного аналога дельта-функции Дирака. Доказана теорема, показывающая существование и единственность решения дискретной обратной задачи.*
***Ключевые слова:*** *гиперболическое уравнение, дискретная обратная задача, вспомогательная дискретная задача, свойства решения.*

**Кіріспе**

Жұмыста гиперболалық теңдеу үшін қойылған дискретті кері есепті зерттеу үшін енгізілген көмекші дискретті есепте Гельфанд-Левитан әдісі қолданылады.

Гельфанд-Левитан әдісі кері есептер теорясында кең таралған әдістердің бірі болып табылады. Оның негізгі идеясы сызықтық емес кері есепті Фредгольмның сызықты интегралдық теңдеулерінің бір параметрлі үйіріне келтіруден тұрады.

Гельфанд-Левитан әдісінің идеясын А.С.Алексеев [1], G.Kunetz [2], Б.С.Парийский [3] еңбектерінен бастап сейсмиканың кері есептерінде көптеп қолданылды. А.С.Благовещенский [4] акустиканың кері есебі үшін Гельфанд-Левитан әдісінің динамикалық нұсқасын құрастырды. А.С.Алексеев пен В.И.Добринский [5] Гельфанд-Левитан әдісінің дискретті аналогын сейсмиканың бір өлшемді кері кинематикалық есебінің сандық шешу алгоритмдерін зерттеуде қолданды. Соңғы жылдары Гельфанд-Левитан әдісінің әртүрлі кері есептерде қолданылуы [6]- [14] еңбектерде ұсынылды.

Бұл жұмыста Гельфанд-Левитан әдісі бойынша гиперболалық теңдеу үшін қойылған дискретті кері есепті зерттеу мақсатында көмекші дискретті есеп енгізіліп, осы көмекші дискретті есептің шешімінің қасиеттері көрсетіледі.

**Есептің қойылымы**

$$v_{t\bar{t}} = v_{x\bar{x}} - q_i v_i^k - \frac{1}{2} q_i\left(\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h\right), \quad k \geq 1, \quad i \in Z, \tag{1}$$

$$v_i^0 = 0, \quad v_i^1 = 0, \quad i \in Z, \tag{2}$$

$$v_0^0 = 0, \quad v_0^1 = 0, \quad v_0^k = \underset{t}{\tilde{f}_0^k}, \quad k > 1 \tag{3}$$

Сонымен қатар $1 \leq k \leq |i|$ үшін

$$v_i^k = 0$$

екенін атап өтуіміз керек.

$$\frac{\omega_i^{k+1} - 2\omega_i^k + \omega_i^{k-1}}{h^2} = \frac{\omega_{i+1}^k - 2\omega_i^k + \omega_{i-1}^k}{h^2} - q_i \omega_i^k, \tag{4}$$

$$\omega_0^k = \delta_k^h, \quad \omega_1^k = \frac{1}{2}\left(\delta_{k+1}^h + \delta_{k-1}^h\right) + \frac{h^2}{2} q_0 \delta_k^h, \quad k \in Z. \tag{5}$$

Мұндағы $\omega_i^k = \omega(ih, kh)$ және $1 < i < |k|$ үшін

$$\omega_i^k = 0.$$

Сонымен қатар $0 \leq m \leq n$ үшін

$$\widetilde{\omega}_m^n = 0,$$

мұндағы

$$\widetilde{\omega}_m^n = \omega_m^n - \frac{1}{2}(\delta_{n+m}^h + \delta_{n-m}^h).$$

**Лемма 1.** *Айталық торлық $\widetilde{\omega}_{i+1}^k$ функциясы*

$$\widetilde{\omega}_{i+1}^{k} = \frac{h^2}{2}\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s} q_j\left[\delta_{k-i+2s}^{h} + \delta_{k-i-2j+2s}^{h}\right] +$$

$$+h^2\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s} q_j\widetilde{\omega}_{j}^{k-i-j+2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{s=0}^{i} q_0\delta_{k-i+2s}^{h} \qquad (6)$$

*формуласы бойынша анықталсын. Сонда*

$$\widetilde{\omega}_{i+1}^{i} = \frac{1}{2}h\sum_{s=0}^{i} q_0, \qquad i = 1,2,\ldots \qquad (7)$$

**Дәлелдеуі**. Жоғарыда көрсетілген (6) формуласынан

$$\widetilde{\omega}_{i+1}^{i} = \frac{1}{2}h^2\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s} q_j\left[\delta_{2s}^{h} + \delta_{2s-2j}^{h}\right] +$$

$$+h^2\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s} q_j\widetilde{\omega}_{j}^{2s-j} + \frac{h^2}{2}\sum_{s=0}^{i} q_0\delta_{2s}^{h} \qquad (8)$$

екендігі шығады. Ал $j \leq -j + 2s$ , яғни $j \leq s$ үшін

$$\widetilde{\omega}_{j}^{2s-j} \equiv 0$$

болғандықтан және

$$h\sum_{j=1}^{s} q_j\delta_{2s-2j}^{h} = q_s$$

екендігін ескере отырып, (8) формуласынан (7) формуласын аламыз. Лемма 1 дәлелденді.

**Лемма 2.** *Айталық торлық $v_i^k$ функциясы дискретті (1)-(3) кері есебінің шешімі және*

$$\tilde{v}_i^k = \frac{1}{2}(\delta_{i+k}^{h} + \delta_{i-k}^{h}) + v_i^k, \;\; i \in Z, \;\; k \in Z, \qquad (9)$$

*болсын, мұндағы*

$$v_i^k = v_i^{-k}$$

*( $k < 0$ үшін торлық $v_i^k$ функциясының жұп жалғасуы). Сонда торлық $v_i^k$ функциясы*

$$v_{t\bar{t}} = v_{x\bar{x}} - q_i v_i^k, \quad i \geq 1, \quad k \in Z, \qquad (10)$$

*теңдеуін және келесі шарттарды*

$$\begin{cases} \tilde{v}_0^0 = \delta_0^h, \\ \tilde{v}_0^{\pm 1} = 0, \\ \tilde{v}_0^k = \underset{t}{f_0^k}, \quad k = \pm 2, \pm 3, \dots \\ \tilde{v}_1^0 = 0, \\ \tilde{v}_1^{\pm 1} = \frac{1}{2}\delta_0^h, \\ v_1^k = \frac{1}{2}\left(\underset{t}{\tilde{f}_0^{k+1}} + \underset{t}{\tilde{f}_0^{k-1}}\right) + \frac{h^2}{2} q_0 \underset{t}{\tilde{f}_0^k}, \ \ k = \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases} \tag{11}$$

*қанағаттандырады.*

**Дәлелдеуі**. (9) және (1) формулаларын ескере отырып

$$\tilde{v}_{t\bar{t}} = \frac{1}{2}(\delta_{i+k}^h + \delta_{i-k}^h)_{t\bar{t}} + v_{t\bar{t}} = \frac{1}{2h^2}[(\delta_{k+1+i}^h - 2\delta_{k+i}^h + \delta_{k-1+i}^h) +$$

$$+(\delta_{i-k-1}^h - 2\delta_{i-k}^h + \delta_{i-k+1}^h)] + v_{x\bar{x}} - q_i v_i^k - \frac{1}{2} q_i (\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h) =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta_{i+k}^h + \delta_{i-k}^h)_{x\bar{x}} + v_{x\bar{x}} - q_i[v_i^k + \frac{1}{2}(\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h)] =$$

$$= \tilde{v}_{x\bar{x}} - q_i \tilde{v}_i^k, \quad i \geq 1, \quad k \in Z.$$

екендігін аламыз.

Енді (11) шарттарының орындалатындағын көрсетеміз. Алдымен (9) және (2), (3) бойынша

$$\tilde{v}_0^0 = \frac{1}{2}\left(\delta_0^h + \delta_0^h\right) + v_0^0 = \delta_0^h,$$

$$\tilde{v}_0^1 = \frac{1}{2}\left(\delta_1^h + \delta_{-1}^h\right) + v_0^1 = 0,$$

$$\tilde{v}_0^{-1} = \frac{1}{2}\left(\delta_{-1}^h + \delta_1^h\right) + v_0^{-1} = 0 + v_0^1 = 0,$$

$$\tilde{v}_0^k = \frac{1}{2}\left(\delta_k^h + \delta_{-k}^h\right) + v_0^0 = 0 + \underset{t}{\tilde{f}_0^k} = \underset{t}{\tilde{f}_0^k},$$

$$k = \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\tilde{v}_1^0 = \frac{1}{2}\left(\delta_1^h + \delta_1^h\right) + v_1^0 = 0,$$

$$\tilde{v}_1^1 = \frac{1}{2}\left(\delta_2^h + \delta_0^h\right) + v_1^1 = \frac{1}{2}\delta_0^h,$$

$$\tilde{v}_1^{-1} = \frac{1}{2}\left(\delta_0^h + \delta_2^h\right) + v_1^{-1} = \frac{1}{2}\delta_0^h + v_1^1 = \frac{1}{2}\delta_0^h,$$

$$\tilde{v}_1^k = \frac{1}{2}\left(\delta_{1+k}^h + \delta_{1-k}^h\right) + v_1^k = 0 + v_1^k = \frac{1}{2}\left[\underset{t}{\tilde{f}_0^{k+1}} + \underset{t}{\tilde{f}_0^{k-1}}\right] + \frac{h^2}{2} q_0 \cdot \underset{t}{\tilde{f}_0^k},$$

$$k = \pm 2, \pm 3, \dots$$

Сонымен лемма 2 дәлелденді.

**Лемма 3.** *Айталық торлық $\omega_i^k$ функциясы (4)-(5) есебінің шешімі болсын, ал торлық $\breve{v}_i^k$ функциясы келесі формулалар арқылы анықталсын:*

$$\breve{v}_0^k = \tilde{v}_0^k,$$

$$\breve{v}_1^k = \tilde{v}_1^k,$$

$$\breve{v}_i^k = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_i^j \underset{t}{f_0^{k-j}}, \quad i > 1, \ \ k \in Z. \tag{12}$$

*Сонда торлық $\breve{v}_i^k$ функциясы (10) теңдеуін қанағаттандырады және (4)-(5) есебінің шешімінің жалғыздығынан шығатыны*

$$\breve{v}_i^k = \tilde{v}_i^k, \quad i \geq 0, \quad k \in Z.$$

**Дәлелдеуі**. (12) және (4) формулаларын ескере отырып,

$$\breve{v}_{t\bar{t}} = \frac{\breve{v}_i^{k+1} - 2\breve{v}_i^k + \breve{v}_i^{k-1}}{h^2} =$$

$$= h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_i^{k-s+1} - 2\omega_i^{k-s} + \omega_i^{k-s-1}}{h^2}\right] \underset{t}{f_0^s} =$$

$$= h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_{i+1}^{k-s} - \omega_i^{k-s} + \omega_{i-1}^{k-s}}{h^2}\right] \underset{t}{f_0^s} -$$

$$-hq_i \sum_{s=-\infty}^{\infty} \omega_i^{k-s} \underset{t}{f_0^s} =$$

$$= \frac{\breve{v}_{i+1}^k - 2\breve{v}_i^k + \breve{v}_{i-1}^k}{h^2} - q_i \breve{v}_i^k =$$

$$= \breve{v}_{x\bar{x}} - q_i \breve{v}_i^k, \quad i \geq 1, \quad k \in Z$$

екендігін аламыз. Лемма 2 дәлелденді.

**Теорема**. *Айталық $0 \leq |k| < i$ болсын. Сонда әрбір белгіленген $i = 2,3 \dots, N$ үшін*

$$\widetilde{\omega}_i^k = \omega_i^k - \frac{1}{2}\left(\delta_{k+i}^h + \delta_{k-i}^h\right)$$

*формуласы бойынша анықталған торлық $\widetilde{\omega}_i^k$ функциясы келесі сызықтық*

$$\widetilde{\omega}_i^k + h \sum_{j=-i+1}^{i-1} \widetilde{\omega}_i^j \tilde{f}_{0\atop t}^{k-j} = -\frac{1}{2}\left[\tilde{f}_{0\atop t}^{k-i} + \tilde{f}_{0\atop t}^{k+i}\right], 0 \le |k| < i, \quad i = 2,3 \dots, N \tag{13}$$

*алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімі болады.*

**Дәлелдеуі.** Алдымен (12) формуласы бойынша

$$\tilde{v}_i^k = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_i^j f_{0\atop t}^{k-j}, \quad i > 1, \quad k \in Z \tag{14}$$

Соңғы (14) теңдігіне келесі теңдіктерді қоямыз:

$$\omega_i^j = \widetilde{\omega}_i^j + \tfrac{1}{2}[\delta_{j-i}^h + \delta_{j+i}^h], \quad i \ge 0, \quad j \in Z,$$

$$f_{0\atop t}^{k-j} = \tilde{f}_{0\atop t}^{k-j} + \delta_{k-j}^h, \quad k \in Z, \quad j \in Z.$$

Сонда келесі теңдікті аламыз:

$$\tilde{v}_i^k = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{\omega}_i^j \tilde{f}_{0\atop t}^{k-j} + h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{\omega}_i^j \delta_{k-j}^h +$$

$$+\frac{1}{2} h \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\delta_{j-i}^h + \delta_{j+i}^h] \tilde{f}_{0\atop t}^{k-j} +$$

$$+\frac{1}{2} h \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\delta_{j-i}^h \delta_{k-j}^h + \delta_{j+i}^h \delta_{k-j}^h] \tag{15}$$

Енді

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{\omega}_i^j \delta_{k-j}^h = \omega_i^k,$$

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{0\atop t}^{k-j} \delta_{j-i}^h = \tilde{f}_{0\atop t}^{k-i},$$

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{0\atop t}^{k-j} \delta_{j+i}^h = \tilde{f}_{0\atop t}^{k+i},$$

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{j-i}^h \delta_{k-j}^h = \delta_{k-i}^h,$$

$$h\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta_{j+i}^{h}\,\delta_{k-j}^{h}=\delta_{k+i}^{h}$$

және $0 \le i \le |j|$ үшін $\widetilde{\omega}_i^j = 0$ екендігін ескере отырып, (15) теңдігінен келесі теңдікті аламыз

$$\tilde{v}_i^k = h\sum_{j=-i+1}^{i-1}\widetilde{\omega}_i^j\,\tilde{f}_{\substack{0\\t}}^{k-j}+\widetilde{\omega}_i^k+\frac{1}{2}\left[\tilde{f}_{\substack{0\\t}}^{k-i}+\tilde{f}_{\substack{0\\t}}^{k+i}\right]+\frac{1}{2}\left[\delta_{k-i}^h+\delta_{k+i}^h\right], i=2,3\ldots,N,\quad k\in Z.$$

Соңғы теңдіктен $0 \le |k| < i$ үшін

$$\tilde{v}_i^k \equiv 0, \delta_{k+i}^h \equiv 0$$

және

$$\delta_{k-i}^h \equiv 0$$

екендіктерін ескере отырып, сызықтық алгебралық (13) теңдеулер жүйесін аламыз. Теорема дәлелденді.

**Нәтижелерді талқылау**

Гиперболалық теңдеу үшін қойылған дискретті кері есепті Гельфанд-Левитан әдісі бойынша зерттеу мақсатында көмекші дискретті есептің қойылымы анықталды. Гиперболалық теңдеу үшін қойылған көмекші дискретті есептің шешімінің қасиеттері көрсетілді және оның дискретті кері есептің шешімімен байланысы зерттелді.

**Қорытынды**

Зерттеу барысында дискретті кері есеп пен көмекші есеп шешімінің арасындағы байланысы көрсететін теорема дәлелденді. Бұл теоремада алынған Гельфанд-Левитан теңдеуінің дискретті аналогының маңызы өте зор.

*Жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP 19678469) қаржыландыру аясында орындалған.*

**Пайдаланылған әдебиеттер тізімі**

1. Алексеев, А. С. (1967). Обратные динамические задачи сейсмики. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. *Москва: Наука,* 9-84.
2. Kunetz, G. (1961). Essai d'analyse de traces sismiques. *Geophysical Prospecting, 9*(3), 317-341.
3. Парийский, Б. С. (1997). Экономические методы численного решения уравнений в свертках и систем алгебраических уравнений с теплицевыми матрицами. *Москва: ВЦ АН СССР.*
4. Благовещенский, А. С. (1971). О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. *Труды Математического института имени ВА Стеклова, 115*(0), 28-38.
5. Алексеев, А. С., Добринский, В. И. (1995). Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики. *Математические проблемы геофизики, 6* (2), 7–53. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР.
6. Romanov, V. G. (2021). On justification of the Gelfand–Levitan–Krein method for a two-dimensional inverse problem. *Siberian Mathematical Journal, 62*(5), 908-924.
7. Kabanikhin, S. I., Novikov, N. S., & Shishlenin, M. A. (2021, December). Gelfand-Levitan-Krein method in one-dimensional elasticity inverse problem. *Journal of Physics: Conference Series 29* (1), 012022. IOP Publishing.

8. Kabanikhin, S., Shishlenin, M., Novikov, N., & Prokhoshin, N. (2023). Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand–Levitan–Marchenko–Krein Equations. *Mathematics, 11*(21), 4458.
9. Kabanikhin, S., Shishlenin, M., & Bakanov, G. (2023). Multidimensional analogue of Krein equation for the inverse acoustic problem. *Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023),* 312.
10. Maktagali, B., Laura, T. (2021, December). Discretization of equations Gelfand-Levitan-Krein and regularization algorithms. *Journal of Physics: Conference Series, 2092*(1), 012015. IOP Publishing.
11. Temirbekov, N. M., Kabanikhin, S. I., Temirbekova, L. N., & Demeubayeva, Zh. E. (2022). Gelfand-Levitan integral equation for solving coefficient inverse problem. *International Scientifically-Technical Journal Herald of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, (3(*85)), 158–167. \\https:/doi.org/10.47533/2020.1606-146X.184
12. Каримов, Ш. Т., Мамадалиева, Ш. Г. (2022). Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения сведением её к уравнению Гелфанда-Левитана первого рода. *Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities, 10*(12), 142–151.
13. Исламов, Э. Р., Мамадалиева, Ш. Г. (2022). Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения сведением её к уравнению Гелфанда-Левитана второго рода. *Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities, 10*(12), 399–404.
14. Алыбаев, А. М. (2022). Регуляризация обратной задачи с оператором гиперболического типа, где вырождается некорректное уравнение Вольтерра первого рода. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований 7*, 57–71.
15. Кабанихин, С. И., Криворотько, О. И. (2020). Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии. *Журнал вычислительной математики и математической физики, 60*(4), 590-600.
16. Пененко, А. В. (2019). Метод Ньютона–Канторовича для решения обратных задач идентификации источников в моделях продукции–деструкции с данными типа временных рядов. *Сибирский журнал вычислительной математики, 22*(1), 57-79.
17. Ватульян, А. О., Нестеров, С. А. (2022). Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, 22*(2), 180-195.
18. Konuk, T., Shragge, J. (2020). Modeling full-wavefield time-varying sea-surface effects on seismic data: *A mimetic finite-difference approach. Geophysics, 85*(2), T45-T55.

**References**

*1.* Alekseev, A. S. (1967). Obratnye dinamicheskie zadachi seismiki. Nekotorye metody i algoritmy interpretatsii geofizicheskikh dannykh *Moscow: Nauka.* (9–84).
2. Kunetz, G. (1961). Essai d'analyse de traces sismiques. *Geophysical Prospecting, 9*(3), 317-341.
3. Pariysky, B. S. (1997). Ekonomicheskie metody chislennogo resheniya uravneniy v svertkakh i sistem algebricheskikh uravneniy s teplitsovymi matritsami. Moscow: VTs AN SSSR.
4. Blagoveshchensky, A. S. (1971). O lokal'nom metode resheniya nestatsionarnoy obratnoy zadachi dlya neodnorodnoy struny. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova, 115*(0), 28–38
5. Alekseev, A. S., Dobrinsky, V. I. (1995). Nekotorye voprosy prakticheskogo ispol'zovaniya obratnykh dinamicheskikh zadach seismiki. *Matematicheskie problemy geofiziki, 6*(2), 7–53. Novosibirsk: VTs SO AN SSSR.
6. Romanov, V. G. (2021). On justification of the Gelfand–Levitan–Krein method for a two-dimensional inverse problem. *Siberian Mathematical Journal, 62*(5), 908-924.
7. Kabanikhin, S. I., Novikov, N. S., Shishlenin, M. A. (2021, December). Gelfand-Levitan-Krein method in one-dimensional elasticity inverse problem. *Journal of Physics: Conference Series 2092*(1), 012022. IOP Publishing.
8. Kabanikhin, S., Shishlenin, M., Novikov, N., Prokhoshin, N. (2023). Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand–Levitan–Marchenko–Krein Equations. *Mathematics, 11*(21), 4458.
9. Kabanikhin, S., Shishlenin, M., Bakanov, G. (2023). Multidimensional analogue of Krein equation for the inverse acoustic problem. *Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023),* 312.
10. Maktagali, B., Laura, T. (2021, December). Discretization of equations Gelfand-Levitan-Krein and regularization algorithms. *Journal of Physics: Conference Series 2092*(1), *012015*. IOP Publishing.
11. Temirbekov, N. M., Kabanikhin, S. I., Temirbekova, L. N., & Demeubayeva, Zh. E. (2022). Gelfand-Levitan integral equation for solving coefficient inverse problem. *International Scientifically-Technical Journal Herald of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, (3*(85)), 158–167. \\https:/doi.org/10.47533/2020.1606-146X.184

12. Karimov, Sh. T., Mamadalieva, Sh. G. (2022). Reshenie koeffitsientnoy obratnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya svedeniem yeye k uravneniyu Gelfanda-Levitana pervogo roda. *Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities*, *10*(12), 142–151.
13. Islamov, E. R., Mamadalieva, Sh. G. (2022). Reshenie koeffitsientnoy obratnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya svedeniem yeye k uravneniyu Gelfanda-Levitana vtorogo roda. *Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities*, *10*(12), 399–404.
14. Alybayev, A. M. (2022). Regulyarizatsiya obratnoy zadachi s operatorom giperbolicheskogo tipa, gde vyrozhdaetsya nekorrektnoe uravnenie Vol'terra pervogo roda. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy 7*, 57–71.
15. Kabanikhin, S. I., Krivorotko, O. I. (2020). Optimizatsionnye metody resheniya obratnykh zadach immunologii i epidemiologii. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, *60*(4), 590–600.
16. Penenko, A. V. (2019). Metod Nyutona–Kantorovicha dlya resheniya obratnykh zadach identifikatsii istochnikov v modelyakh produktsii–destruktsii s dannymi tipa vremennykh ryadov. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, *22*(1), 57–79.
17. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. (2022). Reshenie obratnoy zadachi ob identifikatsii dvukh termomekhanicheskikh kharakteristik funktsional'no-gradiyentnogo sterzhnya. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, *22*(2), 180–195.
18. Konuk, T., Shragge, J. (2020). Modeling full-wavefield time-varying sea-surface effects on seismic data: *A mimetic finite-difference approach. Geophysics*, *85*(2), T45-T55.

**Сведение об авторах**

**Баканов Г.Б. -** доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz

**Мелдебекова С.К.** – докторант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz

**Information about authors**

**Bakanov G.B.** - Doctor of physical-mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz

**Meldebekova S.K. -** doctoral Student, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz