

Абан У.Б.¹, Турметов Б.Х.²

¹магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави

(Казахстан, г.Туркестан), e-mail: abanulbolsyn@gmail.com

²доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет

имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

**О РАЗРЕШИМОСТИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ
ON THE SOLVABILITY OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A CLASS OF
DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH INVOLUTION
ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР АЗҒЫНДАЛҒАН ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫ ҮШІН
ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ**

Аннотация. В данной работе для вырожденных диффузионных уравнения с инволюцией исследуются вопросы разрешимости прямой и обратной задачи по определению правой части. Рассматривается уравнение с дробным производным в смысле Капуто. В эллиптической части рассматриваемого уравнения участвует нелокальный аналог оператора Лапласа с коэффициентом, зависящий от временной переменной.

При исследовании этих задач по временной переменной получаем одномерное вырожденное уравнение с дробной производной Капуто. Решение этого уравнения выражается через специальной функции типа Килбаса-Сайго. Аналогично, по пространственной переменной получается спектральная задача для нелокального оператора Лапласа с краевым условием Дирихле. В явном виде находим собственные функции и собственные значения этой задачи и показываем полноту системы собственных функций в пространстве L_2 .

Используя классический метод Фурье решения рассматриваемых задач ищутся в виде разложения в ряд по собственным функциям. Доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования по всем переменным и абсолютная и равномерная сходимость дифференцированных рядов. Основные утверждения относительно рассматриваемых задач приведены в виде теорем о существовании и единственности.

Ключевые слова: уравнение субдиффузии, производная Капуто, нелокальный оператор Лапласа, прямая задача, обратная задача, метод Фурье, функция Килбаса-Сайго.

Abstract. In this paper, for degenerate diffusion equations with involution, the solvability of the direct and inverse problems for determining the right-hand side is studied. The equation with a fractional derivative in the Caputo sense is considered. The elliptic part of the studied equation involves a nonlocal analogue of the Laplace operator with a coefficient depending on the time variable.

By studying these problems with respect to the time variable, we obtain a one-dimensional degenerate equation with a fractional Caputo derivative. The solution of this equation is expressed by a special function of the Kilbas-Saigo type. Similarly, for the spatial variable, we obtain a spectral problem for the nonlocal Laplace operator with the Dirichlet boundary condition. We explicitly find the eigenfunctions and eigenvalues of this problem and show the completeness of the system of eigenfunctions in space.

Using the classical Fourier method, solutions to the problems under consideration are sought in the form of expansions in a series of eigenfunctions. The absolute and uniform convergence of the series, the possibility of their differentiation term by term in all variables and the absolute and uniform convergence of the differentiated series are proved. The main statements concerning the problems considered are presented in the form of existence and uniqueness theorems.

Key words: subdiffusion equation, Caputo derivative, nonlocal Laplace operator, direct problem, inverse problem, Fourier method, Kilbas-Saigo function.

Аңдатпа. Бұл жұмыста инволюциясы бар азғындалған диффузия теңдеулері үшін тура және оң жақ бөлігін анықтау кері есептерінің шешілу мәселелері зерттеледі. Капуто мағынасында бөліктеу туындысы бар теңдеу қарастырылады. Қарастырылып отырған теңдеудің эллипстік бөлігі уақыт айнымалысына тәуелді коэффициенті бар Лаплас операторының бейлокал аналогын қамтиды.

Осы есептерді зерттеу барысында уақыт айнымалысына қатысты Капутоның бөліктеу туындысы бар бір өлшемді азғындалған теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің шешімі Килбас-Сайго түріндегі арнайы функция арқылы өрнектеледі. Сол сияқты, кеңістіктік айнымалы бойынша бейлокал Лаплас операторы үшін Дирихле шекаралық шарты бар спектрлік есеп алынады. Біз бұл есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін айқын түрде табамыз және меншікті функциялар жүйесінің L_2 кеңістіктегінде толықтығын көрсетеміз.

Классикалық Фурье әдісін қолдана отырып, қарастырылатын есептердің шешімдері меншікті функциялар арқылы жіктелген қатар түрінде ізделеді. Қатарлардың абсолютті және біркелкі жинақтылығы, олардың барлық айнымалылар бойынша мүшелер дифференциалдау мүмкіндігі, дифференциалданған қатарлардың абсолютті және біркелкі жинақтылығы дәлелденген. Қарастырылып отырған мәселелерге қатысты негізгі тұжырымдар шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар түрінде берілген.

Негізгі сөздер: субдиффузия теңдеуі, Капуто туындысы, бейлокал Лаплас операторы, тура есеп, кері есеп, Фурье әдісі, Килбас-Сайго функциясы.

Введение

В современной науке основой большинства моделей, описывающих физические и химические процессы, экономические и социально-биологические явления и многих других, служат дифференциальные уравнения дробного порядка. Подробное сведения об этих моделях можно найти, например, в справочнике по дробному исчислению с приложениями [1] и литературе в них.

Хотя к настоящему времени было опубликовано множество работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка и различным их приложениям, тем не менее, теория дробных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами еще далека от полноты.

В работе А.А.Килбаса и М.Сайго [2] было изучено дифференциальное уравнение дробного порядка следующего вида,

$${}_{RL}D^{\alpha}u(t) + \lambda t^{\beta}u(t) = g(t), 0 < t,$$

где, $0 < \alpha, \beta < -\{\alpha\}$, ${}_{RL}D^{\alpha}$ - производная порядка α в смысле Римана-Лиувилля. Решение этого уравнения выписана в явном виде с помощью специальной функции, зависящей от трех параметров (функция Килбаса-Сайго).

$$E_{\alpha, m, l}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{m=0}^{k-1} \frac{\Gamma[\alpha(mj + l) + 1]}{\Gamma[\alpha(mj + l + 1) + 1]} \right) z^k.$$

Более общее уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами изучены в работах [3-5]. В частности, в работе [5] используя метод преобразования Лапласа, построены явные решения дробного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с переменными коэффициентами.

Цикл работ D.Suragan и соавторов [6-8] были посвящены к построению явного вида решений общего дифференциального уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами. В этих работах рассматривались уравнения с производными Римана-Лиувилля, Капуто и Хильфера. В качестве приложения полученных результатов в работе [8] были изучены начально-краевые задачи для уравнений в частных производных дробного порядка с переменными коэффициентами.

Начально-краевые задачи для вырожденных диффузионных уравнений исследовались в работах многочисленных авторов. Так в работе M.Kirane и соавторов [9] в случае $n=1$ в прямоугольной области для дробного аналога вырожденного параболического уравнения с инволюцией изучены обратные задачи по определению правой части, зависящей от пространственной переменной. Методом Фурье найдены классические решения задач с краевыми условиями Дирихле и Неймана.

В дальнейшем, в работах [10-12] аналогичные исследования проводились для вырожденных уравнений в конечных и бесконечных областях. При этом рассматривались уравнения с линейными и полилинейными операторами. В частности, в работе [12] в

линейных и нелинейных случаях получены оптимальные оценки скоростей затухания решений.

В работе [13] рассмотрена задача моделирования процесса термодиффузии в замкнутом металлическом проводе, обернутом тонким листом изоляционного материала. Моделирование этого процесса приводит к рассмотрению обратной задачи для одномерного вырожденного дробного эволюционного уравнения с инволюцией. Применением метода разделения переменных доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи.

Далее, в работе [14] исследованы вырожденные дробно-эллиптические уравнения типа Трикоми–Геллерстедта–Келдыша. Доказаны теоремы о корректности дробно-эллиптических краевых задач для общих положительных операторов с дискретными спектром.

Отметим, также что обратные задачи для одномерных параболических уравнений с инволюцией с комплекснозначными переменными коэффициентами изучены в работах [15,16]. Установлены существование и единственность решения изучаемых задач. А в работах [17,18] обратные задачи изучены для уравнений диффузии с общим эллиптическим оператором. Кроме того, свойства операторов с инволютивными преобразованиями изучены в работах [19,20].

В настоящей работе рассматривается вырожденное уравнение диффузии с нелокальным оператором Лапласа. Рассматриваемое нами уравнение входят в класс дифференциальных уравнений с инволюцией. Ранее такие задачи для уравнений с инволюцией в основном исследовались в одномерном или двумерном случае. В отличие от этих работ авторов, в данной работе задачи изучаются в n -мерном случае.

Переходим к постановке задачи. Пусть $Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = \{x \in R^n : 0 < x_j < p_j, j = 1, \dots, n\}$ - параллелепипед, $p_j > 0$ и $T > 0$. Рассмотрим отображения $S_j : R^n \rightarrow R^n, 1 \leq j \leq n$ вида

$$S_j x = (x_1, \dots, x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Если рассмотрим всевозможные произведение отображений $S_j, 1 \leq j \leq n$, то общее количество таких отображений с учетом отображения $S_0 x = x$ будет 2^n . Для нумерации этих отображений мы воспользуемся записью целого числа в двоичной системе исчисления. Если i индекс, то кроме обычного обозначения мы будем также использовать запись этого числа в двоичной системе исчисления $i = (i_n \dots i_1)_2$, где $i_k = 0$ или $i_k = 1$. Тогда мы можем рассматривать отображения вида $S_l^{i_l} \dots S_1^{i_1} x$.

Пусть $a_0, a_1, \dots, a_{2^l-1}$ - некоторый набор действительных чисел. Введем оператор

$$L_x v(x) = \sum_{i=0}^{2^l-1} a_i \Delta v(S_l^{i_l} \dots S_1^{i_1} x).$$

Пусть $0 < \alpha \leq 1, \beta > -\alpha, D_t^\alpha$ оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Капуто [21], а именно $D_t^\alpha = I^{1-\alpha} \frac{d}{dt}$, где $I^0 u(t) = u(t)$ и

$$I^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau.$$

В дальнейшем функция $g(t)$ будет означать квазиполином вида $g(t) = \sum_{j=1}^p g_j t^{m_j}$, $m_j > 0, g_j$ заданные постоянные.

Цель исследования: Целью настоящей работы является исследования корректности и доказательства теорем о существовании и единственности решений следующих задач.

Задача 1 (Прямая задача). Необходимо найти функцию $u(t, x) \in C(\bar{Q})$, $D_t^\beta u(t, x), L_x u(t, x) \in C(Q)$, удовлетворяющие условиям,

$$D_t^\alpha u(t, x) - t^\beta L_x u(t, x) = F(t, x) \equiv f(x)g(t), (t, x) \in Q, \quad (1)$$

$$u(t, x) = 0, [0 \leq t \leq T], x \in \partial\Pi. \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), x \in \bar{\Pi}, \quad (3)$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданные функции.

Задача (Обратная задача). Необходимо найти пару функции $u(t, x)$ и $f(x)$ обладающие гладкостью, $u(t, x) \in C(\bar{Q})$, $D_t^\alpha u(t, x), L_x u(t, x) \in C(Q)$, $f(x) \in C(\bar{\Pi})$, удовлетворяющие условиям (1)-(3) и дополнительному условию

$$u(T, x) = \psi(x), x \in \bar{\Pi}, \quad (4)$$

где, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные функции.

Методы исследования задачи

Сначала построим решение одномерного дифференциального уравнения дробного порядка Пусть $\lambda > 0, 0 < \alpha \leq 1, \beta > -\alpha$ - заданные числа. Рассмотрим следующую задачу.

Задача OD1. Необходимо определить функцию $u(t)$ из класса $C[0, +\Gamma)$ для которой $D^\alpha u(t) \in C(0, +\infty)$ и удовлетворяющую условиям,

$$D^\alpha u(t) + \lambda t^\beta u(t) = fg(t), 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u(0) = \varphi, \quad (6)$$

где, f, j - заданные числа, и $g(t) = \sum_{j=1}^p g_j t^{m_j}$ некоторый квазиполином, $m_j > 0, g_j$ заданные постоянные.

Задача OD2. Необходимо определить функцию $u(t)$ из класса $C[0, T]$, для которой $D^\alpha u(t) \in C(0, T)$ и постоянную f удовлетворяющую условиям (5), (6) и дополнительному условию

$$u(T) = \psi, \quad (7)$$

где, φ, ψ - заданные числа, и $g(t) = \sum_{j=1}^p g_j t^{m_j}$ некоторый квазиполином, $m_j > 0, g_j$ заданные постоянные.

Решение задачи **OD1** построена в работах [22] и оно имеет вид

$$u(t) = \varphi E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}) + f \sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha+\mu_j)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}). \quad (8)$$

Введем обозначение

$$G_p(t) = \sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha+\mu_j)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}).$$

Тогда формулу (8) можно переписать в виде

$$u(t) = \varphi E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}) + f G_p(t). \quad (9)$$

Далее, считая f неизвестной и подставляя функцию (9) в условие (7), имеем

$$\psi = u(T) = \varphi E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda T^{\alpha+\beta}) + f G_p(T).$$

Отсюда при выполнении условия $G_p(T) \neq 0$ решение задачи OD2 имеют вид

$$f = \frac{\psi - \varphi \cdot E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda T^{\alpha+\beta})}{G_p(T)}$$

и

$$u(t) = \frac{G_p(t)}{G_p(T)} \psi + \left[E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}) - \frac{G_p(t)}{G_p(T)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda T^{\alpha+\beta}) \right] \varphi.$$

Далее, приведем известные утверждения о собственных функциях и собственных значениях задачи Дирихле для нелокального оператора Лапласа.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Задача S. Найти функцию $v(x) \neq 0$ из класса $v(x) \in C(\bar{\Pi}) \cap C^2(\Pi)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_x v(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in \Pi,$$

и граничному условию

$$v(x)|_{\partial\Pi} = 0,$$

где, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отметим, что Задача S изучена в работе [23]. Кроме того, спектральные вопросы нелокального аналога бигармонического оператора и их приложения к вопросам разрешимости обратных задач для параболического уравнения четвертого порядка изучены в работе [24].

Обозначим

$$\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-1)^{|i|+i_1 k_1 + i_2 k_2 + \dots + i_n k_n}.$$

В работе [23] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть коэффициенты $a_i, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ такие что выполняются условия $\varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \neq 0$. Тогда собственные функции задачи S имеют вид

$$v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x) = C \prod_{i=1}^n \sin \frac{k_i \pi x_i}{p_i}, C = 2^{n/2} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{p_i}}.$$

а соответствующие им собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{k_1 k_2 \dots k_n} = \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \mu_{k_1 k_2 \dots k_n},$$

где $\mu_{k_1 k_2 \dots k_n} = \pi^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{k_i^2}{p_i^2} \right)$. Система функций $\{v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x)\}_{k_j=1}^\infty, j=1, 2, \dots, n$ является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(\Pi)$.

Замечание 1. Если при всех $k_j = 1, 2, \dots, j=1, 2, \dots, n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1, k_2, \dots, k_n} > 0$, то собственные значения задачи S являются положительными.

Замечание 2. Если при всех $k_j = 1, 2, \dots, j=1, 2, \dots, n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1, k_2, \dots, k_n} > 0$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что справедливы оценки

$$C_1 \mu_{k_1 k_2 \dots k_n} \leq \lambda_{k_1 k_2 \dots k_n} \leq C_2 \mu_{k_1 k_2 \dots k_n}. \quad (10)$$

Теперь исследуем сходимость рядов Фурье по системе $v_{k_1 \dots k_n}(x)$. Эти утверждения в основном известны (см. например, [24]), но для полноты изложения мы их приводим с доказательством.

Пусть

$$h(x) = \sum_{k_1=1}^\infty \dots \sum_{k_n=1}^\infty h_{k_1 \dots k_n} v_{k_1 \dots k_n}(x),$$

ряд Фурье функции $h(x)$ по системе $v_{k_1 \dots k_n}(x)$, где

$$h_{k_1 \dots k_n} = (h, v_{k_1 \dots k_n}) \equiv \int_0^{p_1} \dots \int_0^{p_n} h(x_1, x_2, \dots, x_n) v_{k_1 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (11)$$

В дальнейшем всюду символ C будет означать произвольную постоянную, значение которой нас не интересует.

Лемма 1. Пусть $h(x) \in C(\bar{\Pi})$, функции $\frac{\partial^j h(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_j}, 1 \leq j \leq n$ кусочно-непрерывны в $\bar{\Pi}$ и выполняется условие

$$h(x)|_{\partial \Pi} = 0. \quad (12)$$

Тогда числовой ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |h_{k_1 \dots k_n}|$ сходится.

Доказательство. Если $h(x) \in C(\bar{\Pi})$ и $\frac{\partial^j h(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_j}, 1 \leq j \leq n$ кусочно-непрерывны, то интегрируя по частям по переменной x_1 в интеграле (11) с учетом равенства (12) получаем

$$h_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1} h_{k_1 \dots k_n}^{1,0,\dots,0},$$

где,

$$h_{k_1 \dots k_n}^{1,0,\dots,0} = C \int_0^{p_1} \dots \int_0^{p_n} \frac{\partial h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} v_{k_1 \dots k_n}^{1,0,\dots,0}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$v_{k_1 \dots k_n}^{1,0,\dots,0}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \cos \frac{k_1 \pi x_1}{p_1} \cdot \prod_{j=2}^n \sin \frac{k_j \pi x_j}{p_j}.$$

Продолжая этот процесс по всем $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, имеем

$$h_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n} h_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1},$$

где,

$$h_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1} = C \int_0^{p_1} \dots \int_0^{p_n} \frac{\partial^n h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} v_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$v_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \cos \frac{k_j \pi x_j}{p_j}.$$

Далее, используя неравенство Коши-Буняковского получаем

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |h_{k_1 \dots k_n}| = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n} h_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1} \right| \leq \sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \dots k_n^2}} \sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |h_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1}|^2}.$$

Так как система $\{v_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ортогонально в пространстве $L_2(\Pi)$ и $\frac{\partial^n h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \in L_2(\Pi)$, то в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |h_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1}|^2$ сходится. Кроме того,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \dots k_n^2} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^2} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} < \infty.$$

Отсюда вытекает доказательство леммы.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть функция $h(x)$ принадлежит классу $C^2(\bar{\Pi})$ и имеет кусочно-непрерывные в $\bar{\Pi}$ частные производные $\frac{\partial^{n+2} h(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_j^3 \dots \partial x_n}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда если функции $h(x)$ и $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (12), то числовой ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_j=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_j^2 |h_{k_1 \dots k_j \dots k_n}|$ сходится.

Доказательство. Если функции $h(x)$ и $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (7), то интегрируя два раза по переменному x_j интеграл $h_{k_1 \dots k_n}^{1,1,\dots,1}$ получаем

$$h_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_j^5 \dots k_n} h_{k_1 k_2 \dots k_j^5 \dots k_n}^{1,1,\dots,5,\dots,1}$$

где,

$$h_{k_1 k_2 \dots k_j \dots k_n}^{1,1,\dots,3,\dots,1} = C \int_0^{p_1} \dots \int_0^{p_n} \frac{\partial^{n+2} h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_j^3 \dots \partial x_n} v_{k_1 k_2 \dots k_j \dots k_n}^{1,1,\dots,3,\dots,1}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$v_{k_1 k_2 \dots k_j \dots k_n}^{1,1,\dots,5,\dots,1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \cos \frac{k_j \pi x_j}{p_j}.$$

Далее, используя неравенство Коши-Буняковского для $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |h_{k_1 \dots k_n}|$ получаем

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_j=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_j^2 |h_{k_1 \dots k_n}| = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{k_j^2}{k_1 k_2 \dots k_j^3 \dots k_n} |h_{k_1 k_2 \dots k_j \dots k_n}^{1,1,\dots,3,\dots,1}| \leq \sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 \dots k_j^2 \dots k_n^2}} \sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |h_{k_1 k_2 \dots k_j \dots k_n}^{1,1,\dots,3,\dots,1}|^2}.$$

Так как система $\{v_{k_1 k_2 \dots k_j \dots k_n}^{1,1,\dots,3,\dots,1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ортогонально в пространстве $L_2(\Pi)$ и $\frac{\partial^{n+3} h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_j^3 \dots \partial x_n} \in L_2(\Pi)$, то в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_j=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |h_{k_1 k_2 \dots k_j \dots k_n}^{1,1,\dots,3,\dots,1}|^2$ сходится. Отсюда вытекает доказательство леммы.

Следствие 1. Пусть функция $h(x)$ принадлежит классу $C^2(\bar{\Pi})$ и для всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеет кусочно-непрерывные в $\bar{\Pi}$ частные производные $\frac{\partial^{n+2} h(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_j^3 \dots \partial x_n}$. Тогда, если функции $h(x)$ и $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (12), то числовой ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_j=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_j \dots k_n} |h_{k_1 \dots k_j \dots k_n}|$ сходится.

Доказательство этого утверждения следует из представления собственных значений $\lambda_{k_1 k_2 \dots k_n} = \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} \pi^2 \left(\sum_{j=1}^n \frac{k_j^2}{p_j^2} \right)$ и утверждения Леммы 2.

Анализ и основные результаты

Далее, докажем теорему о существовании и единственности решения задачи 1.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $m_j \in \mathbb{N}, g_j$ - постоянные, $g(t) = \sum_{j=1}^p g_j t^{m_j}$ квазиполином, функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2. Тогда решение задачи 1 существует, единственно и имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left[\varphi_{k_1 \dots k_n} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha+\beta} \right) + \right. \\ \left. + f_{k_1 \dots k_n} \left(\sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha+\mu_j)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha+\beta} \right) \right) \right] v_{k_1 \dots k_n}(x), \quad (13)$$

где, $\varphi_{k_1 \dots k_n}$ и $f_{k_1 \dots k_n}$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ соответственно.

Доказательство. Сначала исследуем существование решение задачи 1. Решение будем искать в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} u_{k_1 \dots k_n}(t) v_{k_1 \dots k_n}(x), \quad (14)$$

где, $u_{k_1 \dots k_n}(t)$ неизвестные коэффициенты.

Подставляя функцию $u(t, x)$ из (14) в уравнение (1) для коэффициентов $u_{k_1 \dots k_n}(t)$ получаем следующую задачу Коши

$$D^\alpha u_{k_1 \dots k_n}(t) + \lambda_{k_1 \dots k_n} t^\beta u_{k_1 \dots k_n}(t) = f_{k_1 \dots k_n} g(t), t > 0, \quad (15)$$

$$u_{k_1 \dots k_n}(0) = \varphi_{k_1 \dots k_n}. \quad (16)$$

На основании формулы (10) решение задачи (15)-(16) имеет вид

$$u_{k_1 \dots k_n}(t) = \varphi_{k_1 \dots k_n} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right) + f_{k_1 \dots k_n} \sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha + \mu_j)} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, 1 + \frac{\beta + \mu_j}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right).$$

Следовательно, ряд (13) является формальным решением задачи 1. Покажем теперь, что этот ряд и ряды, полученные после применения к нему операторов D^α и L_x , сходятся.

В работе [25] для функции $E_{\alpha, m, l}(z)$ доказано следующее свойство:

$$\left(1 + \frac{\Gamma[1 + \alpha(l - m)]}{\Gamma[1 + \alpha(l - m + 1)]} t \right)^{-1} \leq E_{\alpha, m, l}(-t) \leq \left(1 + \frac{\Gamma[1 + \alpha l]}{\Gamma[1 + \alpha(l + 1)]} t \right)^{-1} \quad (17)$$

где, $\alpha \in (0, 1), m > 0, l > m - \frac{1}{\alpha}, t \geq 0$.

Используя неравенство (17) для коэффициентов $u_{k_1 \dots k_n}(t)$ имеем

$$\begin{aligned} |u_{k_1 \dots k_n}(t)| &\leq \left| \varphi_{k_1 \dots k_n} \right| \left(1 + \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right)^{-1} + \left| f_{k_1 \dots k_n} \right| \left| \sum_{j=1}^p C_j \left(1 + \frac{\Gamma[1 + \beta + \mu_j]}{\Gamma[1 + \beta + \mu_j + 1]} \lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right)^{-1} \right| \leq \\ &\leq C \left(\left| \varphi_{k_1 \dots k_n} \right| + \left| f_{k_1 \dots k_n} \right| \right). \end{aligned}$$

Тогда для ряда (13) с учетом ограниченности функции $|v_{k_1 \dots k_n}(x)|$ для всех $(t, x) \in \bar{Q}$ получаем оценку

$$|u(t, x)| \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left[\left| \varphi_{k_1 \dots k_n} \right| + \left| f_{k_1 \dots k_n} \right| \right]. \quad (18)$$

Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1, то ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| \varphi_{k_1 \dots k_n} \right|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| f_{k_1 \dots k_n} \right|$ сходятся. Тогда из оценки (18) следует, что ряд (13) сходится равномерно в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $u(t, x) \in C(\bar{Q})$.

Далее, так как $D^\alpha u_{k_1 \dots k_n}(t) = f_{k_1 \dots k_n} g(t) - \lambda_{k_1 \dots k_n} t^\beta u_{k_1 \dots k_n}(t)$, то

$$D^\alpha u(t, x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} f_{k_1 \dots k_n} \left(\sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha + \mu_j)} \right) v_{k_1 \dots k_n}(x) - \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} t^\beta u_{k_1 \dots k_n}(t).$$

Отсюда,

$$\left| D^\alpha u(t, x) \right| \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| f_{k_1 \dots k_n} \right| + C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |u_{k_1 \dots k_n}(t)| \leq$$

$$\leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |f_{k_1 \dots k_n}| + C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |\varphi_{k_1 \dots k_n}|.$$

Аналогично, применяя к функции (13) оператор L_x имеем

$$L_x u(t, x) = - \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} \left[\varphi_{k_1 \dots k_n} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha+\beta} \right) + \right. \\ \left. + f_{k_1 \dots k_n} \left(\sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha+\mu_j)} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, 1 + \frac{\beta+\mu_j}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha+\beta} \right) \right) \right] v_{k_1 \dots k_n}(x).$$

Отсюда,

$$|L_x u(t, x)| \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |f_{k_1 \dots k_n}| + C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |\varphi_{k_1 \dots k_n}|.$$

Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |\varphi_{k_1 \dots k_n}|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |f_{k_1 \dots k_n}|$ сходятся. Тогда ряды представляющие функции $D^\alpha u(t, x)$ и $L_x u(t, x)$ сходятся равномерно в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $D^\alpha u(t, x) \in C(\bar{Q})$ и $L_x u(t, x) \in C(\bar{Q})$.

Далее, единственность решения задачи докажем стандартным методом, основанным на полноте систем собственных функций $v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x)$ в $L_2(\Pi)$. Действительно, пусть $u(t, x)$ - решение однородной задачи 1. Рассмотрим функции

$$u_{k_1 k_2 \dots k_n}(t) = \int_{\Pi} u(t, x) v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x) dx.$$

Тогда,

$$D^\alpha u_{k_1 k_2 \dots k_n}(t) = \int_{\Pi} D^\alpha u(t, x) v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x) dx = \int_{\Pi} L_x u(t, x) v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x) dx = \\ - \lambda_{k_1 k_2 \dots k_n} \int_{\Pi} u(t, x) v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x) dx = - \lambda_{k_1 k_2 \dots k_n} u_{k_1 k_2 \dots k_n}(t).$$

Кроме того,

$$u_{k_1 k_2 \dots k_n}(0) = \int_{\Pi} u(0, x) v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x) dx = 0.$$

Таким образом, для функции $u_{k_1 k_2 \dots k_n}(t)$ получаем однородную задачу (15)-(16) и поэтому $u_{k_1 k_2 \dots k_n}(t) \equiv 0$. Тогда функция $u(t, x)$ - решение однородной задачи 1 ортогональны

всем элементам системы $v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x)$. В силу полноты этой системы $u(t, x) \equiv 0$ в $\bar{Q}$. Теорема доказана.

Основным результатом относительно задачи 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $m_j \in \mathbb{N}, g_j > 0$ - постоянные, $g(t) = \sum_{j=1}^p g_j t^{m_j}$ квазиполином, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2. Тогда решение задачи 2 существует, единственно и имеют вид

$$f(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{G_p(T)} \left[\psi_{k_1 \dots k_n} - \varphi_{k_1 \dots k_n} \cdot E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right) \right] v_{k_1 \dots k_n}(x), \quad (19)$$

$$u(t, x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{G_p(t)}{G_p(T)} \psi_{k_1 \dots k_n} v_{k_1 \dots k_n}(x) + \\ + \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left[E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right) - \frac{G_p(t)}{G_p(T)} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right) \right] \varphi_{k_1 \dots k_n} v_{k_1 \dots k_n}(x), \quad (20)$$

где, $\varphi_{k_1 \dots k_n}$ и $\psi_{k_1 \dots k_n}$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно, а функция $G_p(t)$ определяется равенством

$$G_p(t) = \sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha + \mu_j)} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, 1 + \frac{\beta + \mu_j}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right).$$

Доказательство. Решение задачи 2 также будем искать в виде ряда (14). Тогда для неизвестных коэффициентов $u_{k_1 k_2 \dots k_n}(t)$ получаем задачу с условиями (15), (16) и дополнительным условием

$$u_{k_1 \dots k_n}(T) = \varphi_{k_1 \dots k_n}.$$

В этом случае считая функцию $f(x)$ неизвестной и используя условие перепределения (4), на основе формул (9) и (10) получаем

$$f_{k_1 \dots k_n} = \frac{\psi_{k_1 \dots k_n} - \varphi_{k_1 \dots k_n} \cdot E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right)}{G_p(T)}$$

и

$$u_{k_1 \dots k_n}(t) = \frac{G_p(t)}{G_p(T)} \psi_{k_1 \dots k_n} + \left[E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right) - \frac{G_p(t)}{G_p(T)} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right) \right] \varphi_{k_1 \dots k_n}.$$

Таким образом, ряды (19) и (20) являются формальным решением задачи 2. Исследуем гладкость этих функций. Сначала оценим ряд (19). Так как коэффициенты g_j положительны, то из нижнего неравенства (17) для функции $G_p(T)$ получаем

$$\begin{aligned}
 G_p(T) &= \sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} T^{(\alpha + \mu_j)} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, 1 + \frac{\beta + \mu_j}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right) = \sum_{j=1}^p C_j E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, 1 + \frac{\beta + \mu_j}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right) \geq \\
 &\geq \sum_{j=1}^p C_j \left(1 + \frac{\Gamma \left[1 + \alpha \left(1 + \frac{\beta + \mu_j}{\alpha} - 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]}{\Gamma \left[1 + \alpha \left(1 + \frac{\beta + \mu_j}{\alpha} - 1 - \frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \right]} \lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right)^{-1} = \\
 &\geq \sum_{j=1}^p C_j \left(1 + \frac{\Gamma[1 + \mu_j]}{\Gamma[1 + \mu_j + \alpha]} \lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right)^{-1} = \sum_{j=1}^p C_j \left(\frac{\Gamma[1 + \mu_j + \alpha]}{\Gamma[1 + \mu_j + \alpha] + \Gamma[1 + \mu_j] \lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta}} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{G_p(T)} \leq C \lambda_{k_1 \dots k_n}.$$

Из этой оценки для ряда (19) получаем

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{G_p(T)} |\psi_{k_1 \dots k_n}| + \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{G_p(T)} |\varphi_{k_1 \dots k_n}| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right) \leq \\
 &\leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |\psi_{k_1 \dots k_n}| + C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |\varphi_{k_1 \dots k_n}|.
 \end{aligned}$$

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то числовые ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1 \dots k_n} |\psi_{k_1 \dots k_n}|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |\varphi_{k_1 \dots k_n}|$ сходятся. Тогда ряд (19) сходится равномерно в замкнутой области $\bar{P}$ и поэтому $f(x) \in C(\bar{P})$. Далее, из верхнего неравенства (17) следуют ограниченность функции $\frac{G_p(t)}{G_p(T)}$, $E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} \right)$ и $E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right)$. Тогда для ряда (20) получаем

$$|u(t, x)| \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |\psi_{k_1 \dots k_n}| + C \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} |\varphi_{k_1 \dots k_n}|.$$

Отсюда, как и в случае ряда (19) получаем равномерную сходимость ряда (20) в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $u(t, x) \in C(\bar{Q})$.

Функция $u_{k_1 \dots k_n}(t)$ удовлетворяет уравнению (15), т.е. имеет место равенство

$$D^{\alpha} u_{k_1 \dots k_n}(t) = \frac{\psi_{k_1 \dots k_n} - \varphi_{k_1 \dots k_n} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{k_1 \dots k_n} T^{\alpha + \beta} \right)}{G_p(T)} G_p(t) - \lambda_{k_1 \dots k_n} t^{\alpha + \beta} u_{k_1 \dots k_n}(t).$$

Из этого равенства учитывая ограниченность функций $\frac{G_p(t)}{G_p(T)}$, $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{k_1\dots k_n} t^{\alpha+\beta})$ и

$E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{k_1\dots k_n} T^{\alpha+\beta})$ получаем

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_{k_1\dots k_n}(t)| &\leq \frac{G_p(t)}{G_p(T)} |\psi_{k_1\dots k_n}| + |\varphi_{k_1\dots k_n}| E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{k_1\dots k_n} T^{\alpha+\beta}) + \lambda_{k_1\dots k_n} t^{\alpha+\beta} |u_{k_1\dots k_n}(t)| \leq \\ &\leq C(|\psi_{k_1\dots k_n}| + |\varphi_{k_1\dots k_n}|) + C\lambda_{k_1\dots k_n} (|\psi_{k_1\dots k_n}| + |\varphi_{k_1\dots k_n}|). \end{aligned}$$

Следовательно, ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1\dots k_n} |\psi_{k_1\dots k_n}|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \lambda_{k_1\dots k_n} |\varphi_{k_1\dots k_n}|$ являются

мажорантными по отношению к ряду представляющую функцию $D^\alpha u(t, x)$. Поэтому если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то этот ряд сходится и $D^\alpha u(t, x) \in C(\bar{Q})$. Аналогично доказывается соотношение $L_x u(t, x) \in C(\bar{Q})$. Остается доказать единственность решения задачи. Пусть существуют две пары $\{u_1(t, x), f_1(x)\}$ и $\{u_2(t, x), f_2(x)\}$ удовлетворяющие условиям задачи 2. Тогда пара функции $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (2) и (3). Если рассмотрим функцию

$$u_{k_1 k_2 \dots k_n}(t) = \int_{\Pi} u(t, x) v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x) dx,$$

то для нее получаем задачу

$$D^\alpha u_{k_1\dots k_n}(t) + \lambda_{k_1\dots k_n} t^\beta u_{k_1\dots k_n}(t) = f_{k_1\dots k_n} g(t), t > 0, \quad (21)$$

$$u_{k_1\dots k_n}(0) = 0, u_{k_1\dots k_n}(T) = 0. \quad (22)$$

Решение задачи (21)-(22) имеет вид

$$u_{k_1\dots k_n}(t) = f_{k_1\dots k_n} G_p(t) \equiv f_{k_1\dots k_n} \sum_{j=1}^p \frac{g_j \Gamma(\mu_j + 1)}{\Gamma(\mu_j + 1 + \alpha)} t^{(\alpha+\mu_j)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}(-\lambda_{k_1\dots k_n} t^{\alpha+\beta}).$$

Так как $G_p(t) \neq 0$, то отсюда получаем $f_{k_1\dots k_n} \equiv 0$ и $u_{k_1\dots k_n}(t) = 0$. Следовательно, функции $u(t, x)$ и $f(x)$ ортогональны всем элементам системы $v_{k_1 k_2 \dots k_n}(x)$. В силу полноты этой системы $f(x) \equiv 0, x \in \bar{\Pi}$ и $u(t, x) \equiv 0, (t, x) \in \bar{Q}$. Теорема доказана.

Заключение

В данной работе в прямоугольной области исследованы вопросы разрешимости некоторых прямых и обратных задач для вырожденного уравнения диффузии с инволютивными преобразованными аргументами. Ранее подобные задачи для уравнений с инволюцией в основном рассматривались в одномерном или двумерном случае, а в нашем случае данную задачу мы исследовали в общем в n-мерном случае. Рассматриваемые задачи

решены применением метода Фурье. При разделении переменных возникает спектральная задача для нелокального аналога оператора Лапласа. Используя известные утверждения относительно задачи Дирихле для классического оператора Лапласа нам удалось найти собственные функции и собственные значения этой спектральной задачи. Кроме того, мы доказали полноту системы собственных функций вспомогательной спектральной задачи. Это утверждение позволило нам построить решению основных задач в виде рядов по системе собственных функций.

В дальнейшем планируется продолжить изучение обратных задач для вырожденных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP19677926).

Список использованной литературы

1. Tarasov, V. E. (Ed.). (2019). *Handbook of fractional calculus with applications* (Vol. 5). Berlin, Germany: de Gruyter. <https://doi.org/10.1515/9783110571707>
2. Kilbas, A. A., & Saigo, M. (1997). Closed-form solution of a class of linear differential equations of fractional order. *Differential Equations*, 33(2), 194-204. <http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1609900>
3. Bonilla, B., Rivero, M., & Trujillo, J. J. (2007). On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 187(1), 68-78. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.08.104>
4. Tomovski, Z., Hilfer, R., & Srivastava, H. M. (2010). Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions. *Integral transforms and special functions*, 21(11), 797-814. <https://doi.org/10.1080/10652461003675737>
5. Tomovski, Z., & Garra, R. (2014). Analytic solutions of fractional integro-differential equations of Volterra type with variable coefficients. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 17, 38-60. <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0154-8>
6. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2022). On linear fractional differential equations with variable coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 432, 892-897. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127370>
7. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2023). A new representation for the solutions of fractional differential equations with variable coefficients. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20(1), 1-20. <https://doi.org/10.1007/s00009-022-02228-71660-5446/23/010001-20>
8. Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2021). Hilfer-type fractional differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons & Fractals*, 150, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111146>
9. Kirane, M., Samet, B., & Torebek, B. T. (2017). Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data. *Electronic Journal of Differential Equations*, 257, 1-13.
10. Smadiyeva, A. G. (2023). Degenerate time-fractional diffusion equation with initial and initial-boundary conditions. *Georgian Mathematical Journal*, 30(3), 435-443. <https://doi.org/10.1515/gmj-2022-2217>
11. Smadiyeva, A. G. (2022). Initial-boundary value problem for the time-fractional degenerate diffusion equation. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 113(1), 32-41. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v113.i1.04>
12. Smadiyeva, A. G., & Torebek, B. T. (2023). Decay estimates for the time-fractional evolution equations with time-dependent coefficients. *Proceedings of the Royal Society A*, 479 (2276), 1-21. <https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0103>
13. Kirane, M., Sadybekov, M. A., & Sarsenbi, A. A. (2019). On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(6), 2043-2052.
14. Ruzhansky, M., Torebek, B. T., & Turmetov, B. (2022). Well-posedness of Tricomi–Gellerstedt–Keldysh-type fractional elliptic problems. *Journal of Integral Equations and Applications*, 34(3), 373-387. <https://doi.org/10.1216/jie.2022.34.373>
15. Mussirepova, E., Sarsenbi, A. A., & Sarsenbi, A. M. (2022). Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(17), 11262-11271. <https://doi.org/10.1002/mma.8448>
16. Mussirepova, E., Sarsenbi, A., & Sarsenbi, A. (2022). The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient. *Boundary Value Problems*, 2022(1), 99. <https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1>
17. Ashurov, R. R., & Mukhiddinova, A. T. (2020). Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation. *Differential equations*, 56, 1550-1563. <https://doi.org/10.1134/S0012266120120046>

18. Ashurov, R. R., & Fayziev, Y. E. (2022). On the nonlocal problems in time for subdiffusion equations with the Riemann-Liouville derivatives. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 106(2), 18-37. <https://doi.org/10.31489/2022M2/18-37>
19. Karachik, V. V., & Kh, T. B. (2020). Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi sad journal of mathematics*, 50(1), 67-88. <https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942>
20. Karachik, V., & Turmetov, B. (2017). Solvability of some Neumann-type boundary value problems for biharmonic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 218, 1--17. <http://ejde.math.unt.edu>
21. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* 204, Elsevier.
22. Turmetov, B. (2018). On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2018 (25), 1-14. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.25>
23. Turmetov, B., & Karachik, V. (2023). On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped. In *American Institute of Physics Conference Series* , 2879:1, 1-4. <https://doi.org/10.1063/5.0175246>
24. Turmetov, B., & Karachik, V. (2024). On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution. *AIMS Mathematics*, 9(3), 6832-6849. <https://doi.org/10.3934/math.2024333>
25. Boudabsa, L., & Simon, T. (2021). Some properties of the Kilbas-Saigo function. *Mathematics*, 9(3), 217. <https://doi.org/10.3390/math9030217>

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың е-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Абан Улболсын – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, е-mail: abanulbolsyn@gmail.com
	Aban Ulbolsyn – master's student , Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: abanulbolsyn@gmail.com
	Абан Улболсын – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, е-mail: abanulbolsyn@gmail.com
2	Турметов Батырхан – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, е-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
	Turmetov Batirkhan – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
	Турметов Батырхан – доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, е-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz